Calcul de la valeur moyenne du produit de deux fonctions harmoniques du temps, de même pulsation ω, en notation complexe.

Si $f(\vec{r},t)$ et $g(\vec{r},t)$ sont deux fonctions harmoniques du temps, de même pulsation ω, on peut les écrire sous la forme :

$$\begin{cases} f(\vec{r},t) = \Re\overbrace{\left[\underline{A}(\vec{r})e^{j\omega t}\right]}^{\underline{f}(\vec{r},t)} & \text{avec } \underline{A}(\vec{r}) = |\underline{A}(\vec{r})|e^{j\varphi_A(\vec{r})} \\ g(\vec{r},t) = \Re\underbrace{\left[\underline{B}(\vec{r})e^{j\omega t}\right]}_{\underline{g}(\vec{r},t)} & \text{avec } \underline{B}(\vec{r}) = |\underline{B}(\vec{r})|e^{j\varphi_B(\vec{r})} \end{cases}$$

Alors on montre que la *valeur moyenne temporelle* du produit des deux fonctions peut se calculer à partir de leurs représentations complexes sous la forme suivante :

$$\boxed{< f(\vec{r},t)g(\vec{r},t) >= \frac{1}{2}\Re\left(\underline{f}(\vec{r},t)\underline{g}^*(\vec{r},t)\right)}$$

On note $\Re$ la partie réelle, et $*$ la conjugaison complexe.

<u>Remarque :</u>
Le fait que les fonctions dépendent de la variable spatiale $\vec{r}$ est accessoire ; cette variable ne joue en réalité aucun rôle ici. Tout ce que l'on dit est valable à l'identique pour deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ du temps t seulement. On n'a gardé la dépendance en $\vec{r}$ que comme exemple, car elle est extrêmement répandue pour toutes les grandeurs ondulatoires.

<u>Démonstration :</u>
*) pour les réels :

$$f(\vec{r},t) = |\underline{A}(\vec{r})|\cos(\omega t + \varphi_A(\vec{r}))$$
$$g(\vec{r},t) = |\underline{B}(\vec{r})|\cos(\omega t + \varphi_B(\vec{r}))$$

donc

$$f(\vec{r},t)g(\vec{r},t) = |\underline{A}(\vec{r})\underline{B}(\vec{r})|\frac{1}{2}\left[\cos(2\omega t + \varphi_A(\vec{r}) + \varphi_B(\vec{r})) + \cos(\varphi_A(\vec{r}) - \varphi_B(\vec{r}))\right]$$

d'où

$$< fg >= \frac{1}{2}|\underline{A}(\vec{r})\underline{B}(\vec{r})|\cos(\varphi_A(\vec{r}) - \varphi_B(\vec{r}))$$

*) pour les complexes :

$$\underline{f}(\vec{r},t)\underline{g}^*(\vec{r},t) = \underline{A}(\vec{r})\underline{B}^*(\vec{r}) = |\underline{A}(\vec{r})||\underline{B}^*(\vec{r})|e^{j(\varphi_A(\vec{r})-\varphi_B(\vec{r}))}$$

d'où

$$\Re\left(\underline{f}(\vec{r},t)\underline{g}^*(\vec{r},t)\right) = |\underline{A}(\vec{r})\underline{B}(\vec{r})|\cos(\varphi_A(\vec{r}) - \varphi_B(\vec{r}))$$

Cas particulier : valeur quadratique moyenne d'une fonction

$$\boxed{< f^2(\vec{r},t) >= \frac{1}{2}\left|\underline{f}(\vec{r},t)\right|^2}$$

(la partie réelle n'est plus nécessaire, et par ailleurs ce résultat peut se démontrer bien plus facilement)

Cas particulier : valeur moyenne nulle.

On retrouve comme cas particulier le fait que la valeur moyenne temporelle de deux fonctions en quadrature temporelle est nulle. (En notation réelle, on peut toujours se ramener, avec un éventuel changement de l'origine des temps, à $< \sin(\omega t)\cos(\omega t) >= 0$).

La quadrature temporelle se traduit, en complexes, par le fait que $\frac{\underline{g}}{\underline{f}}$ est imaginaire pur.

Le produit $\underline{f} \cdot \underline{g}^*$ est alors, lui aussi, imaginaire pur et sa partie réelle est donc nulle.

Dans les deux premiers exemples ci-dessous, les grandeurs ne dépendent que de t et pas de $\vec{r}$, mais cela ne change rien au résultat.

<u>Exemples de valeurs moyennes nulles :</u>

- Puissance *moyenne* consommée par un condensateur : $\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$ avec $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$ imaginaire pur (la puissance *instantanée* vaut $u(t)i(t)$)
- Puissance *moyenne* consommée par une bobine : $\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$ avec $\underline{Z} = jL\omega$ imaginaire pur (la puissance *instantanée* vaut $u(t)i(t)$)
- Puissance volumique *moyenne* donnée par le champ électromagnétique à un plasma peu dense (sans collisions) : $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma} \cdot \underline{\vec{E}}$ avec $\underline{\gamma}$ imaginaire pur (la puissance volumique *instantanée* vaut $\vec{j}(t) \cdot \vec{E}(t)$)