Valeur moyenne d'une fonction périodique.

Dans tout ce document, la (ou les) fonction(s) considérée(s) est (sont) périodique(s) par rapport au temps t. Les valeurs moyennes dont il est question sont donc des valeurs moyennes dans le temps.

1 Définition et notation.

Si $f(t)$ est périodique de période T, sa valeur moyenne, notée $< f >$ (parfois $< f(t) >$), est définie par :

$$\boxed{< f >= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t} \tag{1}$$

Remarque : dans le cas où f est une fonction à la fois du temps et de l'espace ($f(x,t)$ ou $f(\vec{r},t)$), la valeur moyenne $< f >$ n'est qu'une moyenne par rapport au temps t, et dépend donc de x (ou de $\vec{r}$) ; elle ne dépend bien sûr plus de t :

$$< f > (\vec{r}) = \frac{1}{T}\int_0^T f(\vec{r},t)\mathrm{d}t$$

2 Propriétés.

Dans ce qui suit, $f(t)$ et $g(t)$ sont deux fonctions périodiques de même période T et α est une constante réelle quelconque.

- Il est facile de démontrer que $\int_\tau^{\tau+T} f(t)\mathrm{d}t$ ne dépend pas de τ, donc on peut prendre $< f >= \frac{1}{T}\int_\tau^{\tau+T} f(t)\mathrm{d}t$, en choisissant n'importe quel τ pour la calculer ($\tau = 0$ n'est pas toujours la valeur la plus "pratique" pour mener le calcul)
- De par la linéarité de l'intégration, il est facile de démontrer les propriétés suivantes :

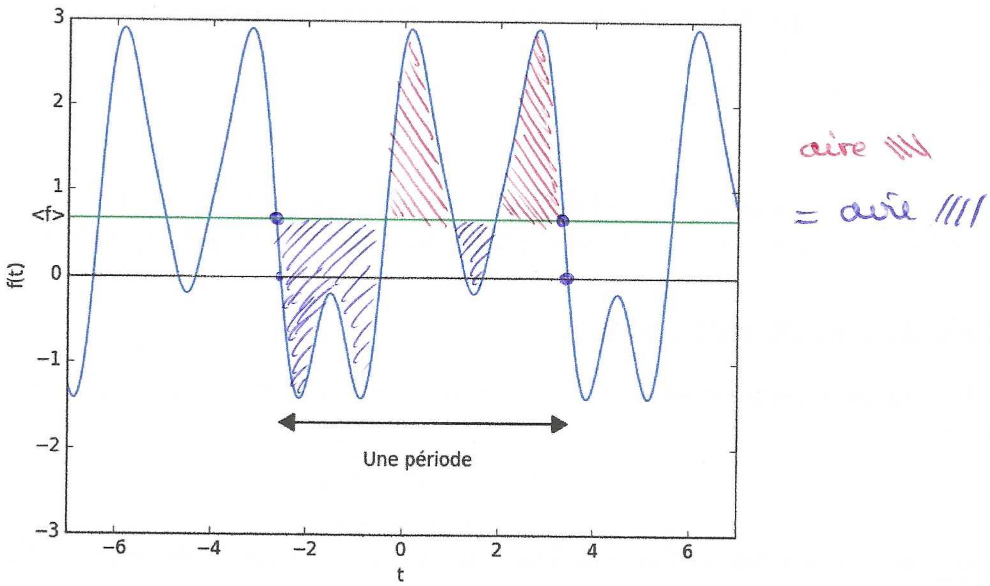
$$\boxed{< f + g >=< f > + < g >} \tag{2}$$

$$\boxed{< \alpha f >= \alpha < f >} \tag{3}$$

- Par contre, bien noter que, en général,

$$\boxed{< fg >\neq< f >< g >}$$

3 Interprétation graphique.



L'interprétation graphique découle directement de la définition de $< f >$: sur un intervalle temporel d'une période, l'aire comprise entre la courbe représentative de $f(t)$ et $< f >$ est également répartie au-dessus et en dessous de $< f >$.

4 En pratique.

Il sera rare, en pratique, d'avoir réellement à calculer une intégrale de la forme (1). Il est bon de connaître les valeurs moyennes des fonctions les plus couramment rencontrées :

$$< \sin(\omega t) >= 0$$
$$< \cos(\omega t) >= 0$$
$$< \sin^2(\omega t) >= \frac{1}{2}$$
$$< \cos^2(\omega t) >= \frac{1}{2}$$
$$< \sin(\omega t)\cos(\omega t) >= 0$$

Pour les deux premières, c'est évident graphiquement. Pour les deux suivantes cela découle directement des relations trigonométriques $\sin^2(\omega t) = \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}$ et $\cos^2(\omega t) = \frac{1+\cos(2\omega t)}{2}$. Pour la dernière, cela provient bien sûr de $\sin(\omega t)\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\sin(2\omega t)$.

En ajoutant à ces quelques résultats très simples les propriétés vues précédemment, on arrive à déterminer facilement 90% des valeurs moyennes rencontrées en pratique.

Par exemple, $< A\cos^2\left(\frac{\omega t}{7} + \alpha\right) - 3 >= \frac{A}{2} - 3$.

5 Cas particulier des fonctions harmoniques : utilisation des représentations complexes.

Si $f(t)$ et $g(t)$ sont deux fonctions harmoniques de pulsation ω, on utilise très fréquemment leurs amplitudes complexes $\underline{f}$ et $\underline{g}$ telles que $f(t) = \Re\left(\underline{f}\,\mathrm{e}^{j\omega t}\right)$ et $g(t) = \Re\left(\underline{g}\,\mathrm{e}^{j\omega t}\right)$.

Le calcul de la valeur moyenne du produit $f(t)g(t)$ peut se faire avec les fonctions réelles, mais c'est parfois un peu délicat mathématiquement.

Il est possible d'utiliser les amplitudes complexes de la manière suivante pour calculer cette valeur moyenne, et ceci simplifie en général considérablement les calculs :

$$\boxed{< f(t)g(t) >= \frac{1}{2}\Re(\underline{f}\,\underline{g}^*)} \tag{4}$$

où l'exposant "étoile" désigne le complexe conjugué.

La démonstration fait l'objet d'un autre document ; elle n'est pas à connaître.

Dans le cas où l'on a à faire à des fonctions du temps et de l'espace, la relation est la même et s'écrira

$$\boxed{< f(\vec{r},t)g(\vec{r},t) >= \frac{1}{2}\Re(\underline{f}(\vec{r})\underline{g}^*(\vec{r}))} \tag{5}$$

(cette valeur moyenne dépend bien sûr dans ce cas de $\vec{r}$).

Remarque : Deux nombres complexes conjugués ayant la même valeur réelle, on peut tout aussi bien choisir de conjuguer la fonction $\underline{f}$ plutôt que la fonction $\underline{g}$, ce qui donne :

$$\boxed{< f(t)g(t) >= \frac{1}{2}\Re(\underline{f}^*\,\underline{g})} \tag{6}$$

$$\boxed{< f(\vec{r},t)g(\vec{r},t) >= \frac{1}{2}\Re(\underline{f}^*(\vec{r})\underline{g}(\vec{r}))} \tag{7}$$

6 Exercices.

6.1 Déterminer la valeur moyenne de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(t) = \cos(\omega t) + \sin(5\omega t)$
b) $f(t) = 3\cos^2\left(\frac{\omega t}{2} + 1\right) - 6\sin(\omega t)$
c) f est une fonction impaire et périodique
d) $f(t) = \cos^3(\omega t)$
e) $f(t) = 3\sin^4\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$

6.2 Valeur moyenne de la dérivée d'une fonction périodique.

Montrer que, quelle que soit la fonction $f(t)$, pourvu qu'elle soit périodique de période T, la valeur moyenne de sa dérivée est nulle : $\left\langle \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \right\rangle = 0$.

6.3 Application aux valeurs efficaces d'un signal.

On rappelle que la valeur efficace d'un signal périodique $u(t)$ (par exemple une tension, ou une intensité, mais pas seulement) est la racine carrée de la valeur moyenne du carré de $u(t)$:

$$\boxed{U_{\text{eff}} = \sqrt{< u^2(t) >}} \tag{6}$$

C'est la valeur appelée “RMS” en anglais, et pour de nombreux instrument de mesure (Root Mean Square).

a) Montrer que pour une tension sinusoïdale $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$, la valeur efficace est bien $U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$.
b) Établir l'expression de la valeur efficace d'une tension en créneau (“triangle”) symétrique, oscillant entre $-U_0$ et $+U_0$.
c) Même question pour une tension en créneau symétrique, qui prend alternativement les valeurs $-U_0$ (de $t = 0$ à $t = \frac{T}{2}$) et $+U_0$ (de $t = \frac{T}{2}$ à $t = T$).
d) Établir l'expression de la puissance *moyenne* consommée par une résistance R, aux bornes de laquelle il y a la tension $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$; l'exprimer en fonction de U_0 et R, en fonction de U_{eff} et R.
e) Montrer qu'un condensateur consomme, en régime sinusoïdal, une puissance moyenne nulle. Même question pour une bobine “parfaite“ (c'est-à-dire dont la résistance est nulle).
f) On considère un dipôle linéaire d'impédance complexe $\underline{Z} = |\underline{Z}| \mathrm{e}^{j\varphi}$. On applique à ses bornes une tension $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$. Il est alors parcouru par une intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \alpha)$. Déterminer l'expression du déphasage α entre l'intensité et la tension. Exprimer la puissance moyenne *consommée* par ce dipôle, en fonction en particulier des valeurs efficaces U_{eff} et I_{eff} de la tension et de l'intensité.