Expressions des opérateurs vectoriels dans les différents systèmes de coordonnées.

1 Coordonnées cartésiennes (x, y, z).

Fonction scalaire $U(x, y, z)$
Fonction vectorielle $\vec{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\vec{e}_x + A_y(x, y, z)\vec{e}_y + A_z(x, y, z)\vec{e}_z$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{grad}}\, U &= \vec{\nabla}\, U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z \\
\text{div}\, \vec{A} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z \\
\text{lap}\, U &= \text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, U\right) = \nabla^2 U = \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \\
\overrightarrow{\text{lap}}\, \vec{A} &= \vec{\nabla^2}\vec{A} = \vec{\Delta}\vec{A} = (\nabla^2 A_x)\vec{e}_x + (\nabla^2 A_y)\vec{e}_y + (\nabla^2 A_z)\vec{e}_z
\end{aligned}$$

2 Coordonnées cylindriques (r, θ, z).

Fonction scalaire $U(r, \theta, z)$
Fonction vectorielle $\vec{A}(r, \theta, z) = A_r(r, \theta, z)\vec{e}_r(\theta) + A_\theta(r, \theta, z)\vec{e}_\theta(\theta) + A_z(r, \theta, z)\vec{e}_z$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\, U = \overrightarrow{\text{grad}}\, U &= \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \text{div}\, \vec{A} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z \\
\nabla^2 U = \text{lap}\, U &= \text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, U\right) = \Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

3 Coordonnées sphériques (r, θ, φ).

Fonction scalaire $U(r, \theta, \varphi)$
Fonction vectorielle $\vec{A}(r, \theta, \varphi) = A_r(r, \theta, \varphi)\vec{e}_r(\theta, \varphi) + A_\theta(r, \theta, \varphi)\vec{e}_\theta(\theta, \varphi) + A_\varphi(r, \theta, \varphi)\vec{e}_\varphi(\theta, \varphi)$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\, U = \overrightarrow{\text{grad}}\, U &= \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \text{div}\, \vec{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\
\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\varphi \\
\nabla^2 U = \text{lap}\, U &= \text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, U\right) = \Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}
\end{aligned}$$

Dans tous les systèmes de coordonnées, le laplacien vectoriel est en fait défini à partir de la relation $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\vec{A}\right) - \Delta\vec{A}$. Son expression n'est simple que dans le cas des coordonnées cartésiennes.
Il importe dans tous les calculs, dans toutes les écritures, de respecter l'homogénéité de *nature* entre les vecteurs et les scalaires. Toujours se rappeler qu'une divergence est un CHAMP SCALAIRE (ainsi que le laplacien d'un scalaire), et qu'un gradient, un rotationnel, et le laplacien d'un vecteur sont des CHAMPS VECTORIELS.