Transformées de Fourier.

Nous choisissons d'introduire la transformée de Fourier sur des fonctions du temps t. Tout ce qui est écrit est bien sûr immédiatement transposable à des fonctions d'une variable d'espace qui serait notée x, par exemple.

Soit $f(t)$ une fonction *complexe* d'une variable t *réelle*.

On notera $\tilde{f}(\nu)$ sa **transformée de Fourier** (ν est une variable *réelle*), définie par l'égalité de gauche ci-dessous :

$$\boxed{\tilde{f}(\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-i2\pi\nu t}\,\mathrm{d}t \quad \leftrightarrow \quad f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu)\,\mathrm{e}^{+i2\pi\nu t}\,\mathrm{d}\nu}$$

La flèche ci-dessus a une signification volontairement ambiguë ; les conditions que doit remplir la fonction $f(t)$ pour qu'il s'agisse d'une véritable équivalence sont pour le moins... compliquées.

De même, et bien évidemment, la transformée de Fourier de $f(t)$ n'est définie que si l'intégrale de gauche ci-dessus existe. Nous admettrons que c'est en général le cas pour des fonctions $f(t)$ d'intérêt physique (en particulier ces fonctions sont en général à support borné et relativement régulières et donc la convergence de l'intégrale ne pose le plus souvent pas de problème).

On notera que la transformée de Fourier $\tilde{f}(\nu)$ est une fonction *complexe* d'une variable *réelle*.

La transformée de Fourier inverse (définie par l'intégrale de droite) n'est elle aussi définie que si cette intégrale existe. Elle s'identifie en général à $f(t)$, comme indiqué ci-dessus. L'exception la plus notable susceptible d'être rencontrée en physique concerne les points de discontinuité de $f(t)$, pour lesquels l'égalité de droite n'est pas vérifiée.

Il est à noter que, pour le physicien, t et ν sont bien sûr deux variables de dimensions inverses l'une de l'autre (à un temps t correspond une fréquence ν) (puisque l'argument $\pm 2\pi\nu t$ des exponentielles doit être sans dimension).

Interprétation « physique » : l'intégrale de droite nous indique que $f(t)$ peut être considérée comme la superposition d'une infinité d'exponentielles complexes de fréquences ν variant continûment de 0 à $+\infty$ (ou même de $-\infty$ à $+\infty$), chacune étant d'amplitude (complexe) égale à $\tilde{f}(\nu)\mathrm{d}\nu$. Le fait que l'amplitude soit complexe permet de prendre en compte (via l'argument de $\tilde{f}(\nu)$) une phase différente pour chacune de ces composantes.

On parle parfois de $\tilde{f}(\nu)$ comme décrivant le « contenu en fréquences » de $f(t)$ (il serait plus exact d'en parler pour $|\tilde{f}(\nu)|$, soit le module de la transformée de Fourier).

Principales propriétés (liste non exhaustive !) :

(*la démonstration de ces propriétés n'est pas insurmontable quoique, parfois, délicate au point de vue rigueur mathématique !)*

- **la transformation de Fourier est une opération linéaire :** $\widetilde{f+g}=\widetilde{f}+\widetilde{g}$; $\widetilde{\alpha f}=\alpha\widetilde{f}$ (si α est une constante)
- si $f(t)$ est réelle (cas fréquent), alors $\widetilde{f}(-\nu)=\left[\widetilde{f}(\nu)\right]^*$ (voir note[1]) (on note par * l'opération de conjugaison complexe)
- si $f(t)$ est paire (resp. impaire), alors $\widetilde{f}(\nu)$ est paire (resp. impaire)
- et donc, si $f(t)$ est paire et réelle, sa transformée de Fourier est paire et réelle ; si $f(t)$ est impaire et réelle, sa transformée de Fourier est impaire et imaginaire pure
- Si $f(t)$ a pour transformée de Fourier $\widetilde{f}(\nu)$, alors :

fonction	transformée de Fourier	remarques
$f'(t)$	$i2\pi\nu\widetilde{f}(\nu)$	dériver $f(t)$ revient dans le domaine spectral à multiplier par $i\omega$
$f^{(n)}(t)$	$(i2\pi\nu)^n\widetilde{f}(\nu)$	
$f(t - a)$	$\mathrm{e}^{-i2\pi\nu a}\widetilde{f}(\nu)$	et donc translater $f(t)$ ne change pas son « contenu en fréquences »
$g(t)=f(at)$ (a réel non nul)	$\widetilde{g}(\nu)=\frac{1}{\lvert a\rvert}\widetilde{f}\left(\frac{\nu}{a}\right)$	plus la fonction $f(t)$ est « large », plus sa transformée de Fourier $\widetilde{f}(\nu)$ est « étroite »

Théorème de Parseval-Plancherel :

Ce théorème pourrait figurer dans la rubrique « propriétés » mais sa très grande importance pour le physicien nous a fait le placer à part.

Si $f(t)$ a pour transformée de Fourier $\widetilde{f}(\nu)$

et si $g(t)$ a pour transformée de Fourier $\widetilde{g}(\nu)$

alors $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g^*(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{f}(\nu)\,\widetilde{g}^*(\nu)\,\mathrm{d}\nu$$

Cas particulier très important : si $g = f$ on obtient $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert f(t)\rvert^2\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert\widetilde{f}(\nu)\rvert^2\,\mathrm{d}\nu}$.

L'interprétation physique a bien sûr trait aux grandeurs énergétiques : l'énergie « contenue » dans le signal peut être calculée aussi bien sur $f(t)$ que sur $\widetilde{f}(\nu)$.

1 Et alors il est relativement aisé de montrer que $f(t)=\int_0^{+\infty} 2\lvert\widetilde{f}(\nu)\rvert\cos(2\pi\nu t+\phi(\nu))\,\mathrm{d}\nu$ où $\phi(\nu)=\arg(\widetilde{f}(\nu))$; on voit encore plus aisément sous cette forme que $f(t)$ est la superposition d'une infinité de fonctions sinusoïdales, dont les fréquences vont de 0 à $+\infty$.

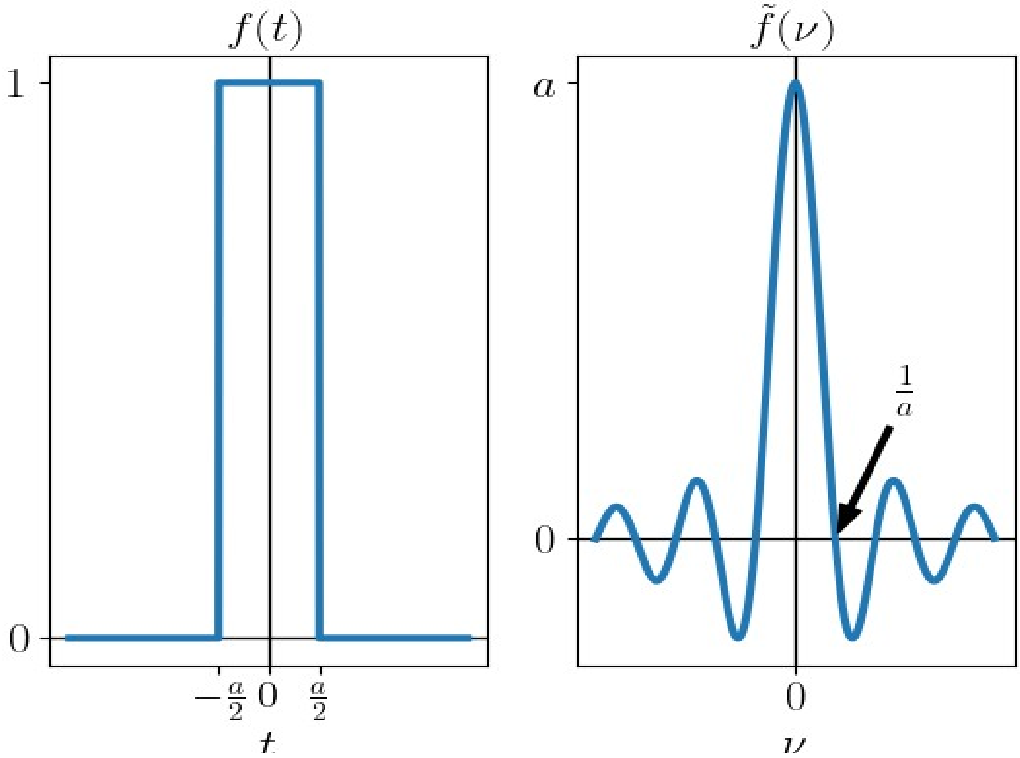
Exemples : (les exemples donnés concernent des fonctions réelles et paires, et il en est donc de même pour leur transformée de Fourier, ce qui la rend facile/possible à tracer)

Fonction « porte » :

$$f(t)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<-\frac{a}{2} \\ 1 \text{ si } -\frac{a}{2}<x<\frac{a}{2} \\ 0 \text{ si } \frac{a}{2}<x \end{cases}$$

$$\tilde{f}(\nu)=a\,\mathrm{sinc}(\pi\nu a)=a\frac{\sin(\pi\nu a)}{\pi\nu a}$$

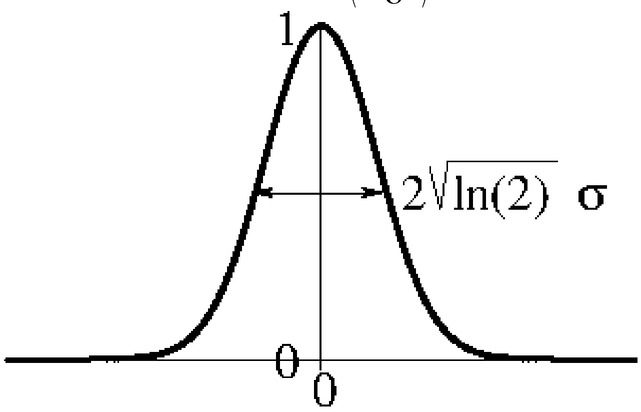
(le calcul est tout à fait faisable)

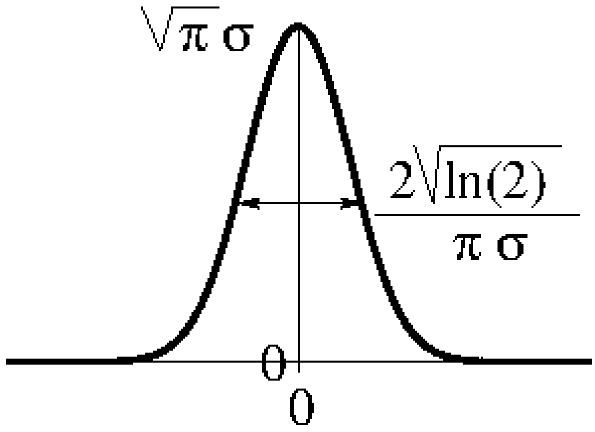


On voit bien ici que, plus la fonction *f*(*t*) est « étroite » (c'est-à-dire plus *a* est petit), plus sa transformée de Fourier est « large » (le premier zéro de celle-ci étant à $\nu=\frac{1}{a}$) et d'amplitude petite (le maximum en $\nu=0$ ayant pour valeur *a*) On peut vérifier – qualitativement au moins - le théorème de Parseval-Plancherel : l'aire sous les deux courbes, <u>une fois mises au carré</u>, doit être la même) Pour *f*(*t*), cette aire vaut *a*. Pour $\tilde{f}(\nu)$, son ordre de grandeur sera $a^2\times\frac{1}{a}\approx a$ (la hauteur maximale au carré fois la largeur caractéristique). Bien évidemment, pour vérifier rigoureusement le théorème, il faut faire le calcul précis de l'aire en question pour $(\tilde{f}(\nu))^2$.

La transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne :

$$f(t)=\exp\left(-\frac{t^2}{\sigma^2}\right) \qquad \tilde{f}(\nu)=\sqrt{\pi}\,\sigma\exp\left(-\pi^2\sigma^2\nu^2\right)$$





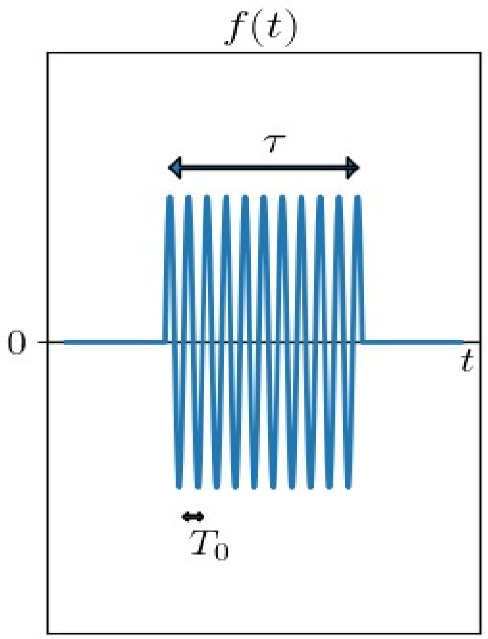
On voit bien ci-dessus que plus σ est grand, plus *f*(*t*) est « large » (largeur à mi-hauteur égale à $2\sqrt{\ln 2}\,\sigma$), mais plus $\tilde{f}(\nu)$ est « resserrée »(largeur à mi-hauteur en $\frac{1}{\sigma}$) et, en conséquence, « haute » (hauteur proportionnelle à σ) : l'aire sous les deux courbes -une fois mises au carré- doit être la même d'après le th. de Parseval-Plancherel (ces deux aires sont proportionnelles à σ).

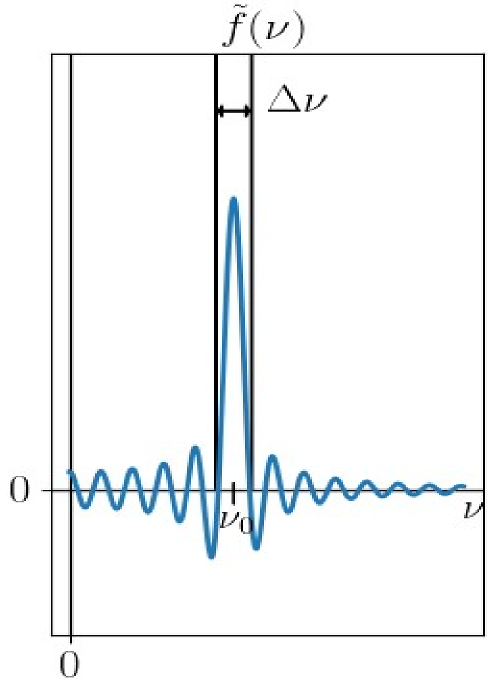
Exemple d'un train d'onde :

L'exemple qui suit est particulièrement important dans le cadre du modèle d'émission de la lumière étudié en cours. Il s'agit d'un « train d'onde », à savoir une fonction sinusoïdale du temps, mais « tronquée » sur un intervalle de durée finie τ, durée très supérieure à la période de la sinusoïde.

$f(t)=A\cos(2\pi\nu_0 t)$ sur l'intervalle $[-\frac{\tau}{2},+\frac{\tau}{2}]$, et 0 ailleurs ($\tau\gg\frac{1}{\nu_0}=T_0$)

$$\tilde{f}(\nu)=\frac{A\tau}{2}\left(\mathrm{sinc}(\pi(\nu-\nu_0)\tau)+\mathrm{sinc}(\pi(\nu+\nu_0)\tau)\right)$$





Pour la transformée de Fourier $\tilde{f}(\nu)$, on n'a représenté que les fréquences ν positives pour plus de lisibilité (la transformée de Fourier est paire et, de toute façon, seule $|\nu|$ a une vraie signification physique). On voit bien sur cette transformée de Fourier un pic marqué centré sur la fréquence ν_0, signe que notre signal *f*(*t*) a une composante importante à cette fréquence. Mais, alors qu'il n'y aurait en $\pm\nu_0$ qu'un pic infiniment fin si la sinusoïde était de durée infinie (le signal ne comportant alors *que* la fréquence ν_0), le fait que la sinusoïde soit « tronquée » en durée provoque l'apparition d'une infinité de fréquences au voisinage de ν_0. On peut montrer que la largeur du pic est $\Delta\nu=\frac{2}{\tau}$. On retrouve ici bien sûr le fait que, plus la fonction *f*(*t*) est « large », plus sa transformée de Fourier est « étroite ». On note d'ailleurs ici $\tau.\Delta\nu=2$.

<u>« Relations d'incertitude »</u>

Nous verrons que les relations d'incertitude en mécanique quantique découlent directement des propriétés de la transformation de Fourier, en particulier du fait que « plus la fonction *f*(*t*) est « large », plus sa transformée de Fourier $\tilde{f}(\nu)$ est « étroite » ».

<u>Autres expressions.</u>

La situation se complique un peu, en apparence du moins, si l'on prend en compte le fait que de nombreuses autres définitions de la transformée de Fourier sont utilisées selon les auteurs, ou selon les domaines de la physique (optique, mécanique quantique, ...). Certes, ces autres « transformées de Fourier » sont absolument équivalentes dans leurs principes et leurs propriétés, mais elles peuvent dérouter, la première fois qu'on les rencontre. Elles se déduisent toutes de celle présentée jusque là par un simple changement de variable.

<u>En fonction de la « pulsation »</u> $\omega=2\pi\nu$ <u>:</u>

Comme exemple, supposons que l'on dispose, comme précédemment, d'une fonction *f*(*t*) de la variable temps *t*. Mais que nous souhaitions maintenant utiliser, comme variable spectrale, la pulsation $\omega=2\pi\nu$ au lieu de la fréquence ν.

On peut choisir comme *définition* de la transformée de Fourier $\tilde{F}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}t$; c'est-à-dire, pour faire le lien avec la transformée $\tilde{f}(\nu)$ définie précédemment : $\tilde{F}(\omega)=\tilde{f}(\frac{\omega}{2\pi})$, ce qui est équivalent à $\tilde{f}(\nu)=\tilde{F}(2\pi\nu)$.

La transformée inverse nous donne alors (par simple changement de variable) :

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{F}(2\pi\nu)\mathrm{e}^{i2\pi\nu t}\mathrm{d}\nu=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{F}(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

D'où le nouveau couple de relation transformée de Fourier – transformée inverse :

$$\boxed{\tilde{F}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}t \quad\leftrightarrow\quad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{F}(\omega)\mathrm{e}^{+i\omega t}\mathrm{d}\omega}$$

On note l'apparition du facteur $\frac{1}{2\pi}$, qui « dissymétrise » les deux relations.

Que devient alors le théorème de Parseval-Plancherel ?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)[g(t)]^* \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu)[\tilde{g}(\nu)]^* \mathrm{d}\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\left[\tilde{g}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\right]^* \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(\omega)[\tilde{G}(\omega)]^* \mathrm{d}\omega$$

Là aussi, le facteur 2π rend les expressions moins symétriques.

C'est la raison qui pousse de nombreux auteurs à adopter une autre définition de la transformée de Fourier, qui « partage équitablement » le facteur 2π entre *f*(*t*) et sa transformée de Fourier :

$$\boxed{\begin{array}{c}\tilde{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}t \quad \leftrightarrow \\ f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(\omega)\mathrm{e}^{+i\omega t}\mathrm{d}\omega\end{array}}$$

Les deux expressions sont à nouveau symétriques, et l'on vérifiera que le théorème de Parseval-Plancherel s'écrit alors avec cette dernière définition :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)[g(t)]^* \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(\omega)[\tilde{G}(\omega)]^* \mathrm{d}\omega$$

Mécanique quantique :

Une autre convention encore est utilisée fréquemment en mécanique quantique, pour la transformée de Fourier de la fonction d'onde (on ne considère ici que le cas « à 1 dimension ») $\psi(x)$: il s'agit d'exprimer la transformée de Fourier en fonction de la variable impulsion *p* (qui est bien proportionnelle à la fréquence spatiale $\frac{1}{\lambda}$: $p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}$).

$$\boxed{\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\mathrm{e}^{-i\frac{px}{\hbar}}\mathrm{d}x \quad \leftrightarrow \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}(p)\mathrm{e}^{+i\frac{px}{\hbar}}\mathrm{d}p}$$

(La convention choisie introduit le facteur $\sqrt{2\pi\hbar}$ pour conserver des expressions symétriques pour la transformée de Fourier et son inverse, et permet également une expression très simple pour le théorème de Parseval-Plancherel : $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\psi}(p)|^2 \mathrm{d}p}$).

Références bibliographiques

APPEL Walter, *Mathématiques pour la physique et les physiciens*, Paris, H & K Éditions, s.d.