

---

# Les systèmes de coordonnées.

P. Colin

24 avril 2024

## Résumé

Nous allons dans ce document rappeler tout ce que vous devez savoir sur les trois systèmes de coordonnées qui figurent explicitement à votre programme : cartésiennes, cylindriques, sphériques. Dans tout le document, on se situe dans le cas d'un espace à trois dimensions ; nous n'aborderons pas le cas des coordonnées dans un plan (cartésiennes, polaires). Qui peut le plus peut le moins...

## 1 Les coordonnées cartésiennes.

Il s'agit bien évidemment des coordonnées que vous connaissez depuis le plus longtemps, les plus faciles à utiliser.

L'espace est supposé muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

### 1.1 Définition.

Un point  $M$  est repéré par ses trois coordonnées :  $M(x, y, z)$  telles que

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

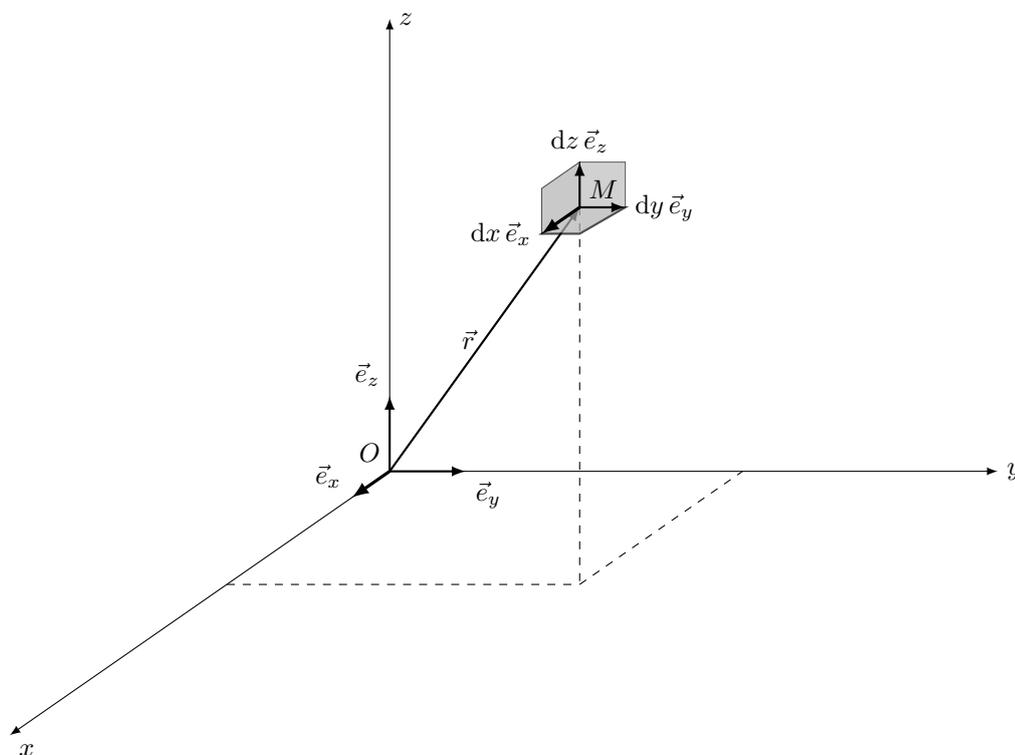


FIGURE 1 – Les coordonnées cartésiennes. On a représenté un point  $M(x, y, z)$  quelconque. Ainsi que de petits déplacements élémentaires au voisinage de ce point  $M$ . Les trois surfaces élémentaires sont représentées en grisé.

Si  $x$  varie de  $dx$ , alors  $\vec{r}$  varie de  $d\vec{r} = dx \vec{e}_x$   
 Si  $y$  varie de  $dy$ , alors  $\vec{r}$  varie de  $d\vec{r} = dy \vec{e}_y$   
 Si  $z$  varie de  $dz$ , alors  $\vec{r}$  varie de  $d\vec{r} = dz \vec{e}_z$

Et, en général,

$$\boxed{d\vec{r} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z}$$

## 1.2 Les surfaces élémentaires :

Ces surfaces sont représentées en grisé sur la figure 1.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{d^2S_z} &= dx dy \vec{e}_z \\ \overrightarrow{d^2S_y} &= dx dz \vec{e}_y \\ \overrightarrow{d^2S_x} &= dy dz \vec{e}_x \end{aligned}$$

On a donné en fait ici les *vecteurs* surface, perpendiculaires à l'élément de surface considéré (et de norme égale à l'aire de la surface).

## 1.3 Le volume élémentaire :

$$\boxed{d^3\tau = dx dy dz}$$

Remarque : Ce qui rend ces coordonnées particulièrement faciles à utiliser, c'est le fait que les trois vecteurs  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$  sont indépendants de la position du point  $M$ .

## 1.4 Surfaces particulières.

Rien d'extraordinaire dans ce qui suit ; ce paragraphe n'est là que par souci de cohérence avec les autres systèmes de coordonnées. On se reportera utilement à la figure 2.

- Les surfaces d'équation  $x = \text{cte}$  sont bien évidemment les plans parallèles au plan  $Oyz$ .
- Les surfaces d'équation  $y = \text{cte}$  sont bien évidemment les plans parallèles au plan  $Oxz$ .
- Les surfaces d'équation  $z = \text{cte}$  sont bien évidemment les plans parallèles au plan  $Oxy$ .

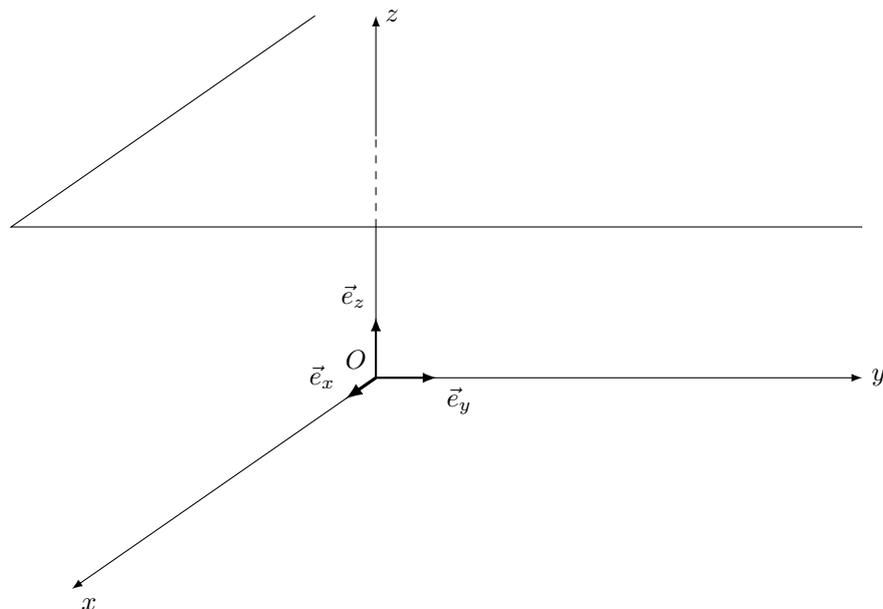


FIGURE 2 – On a représenté ici, pour l'exemple, une surface d'équation  $z = \text{cte}$ , qui est un plan parallèle au plan  $Oxy$ .

## 1.5 Lignes particulières.

Là aussi rien d'extraordinaire ; il n'y a même que des évidences.

- Les lignes tangentes en tout point au vecteur  $\vec{e}_x$  sont bien évidemment les droites parallèles à l'axe  $Ox$ .
- Les lignes tangentes en tout point au vecteur  $\vec{e}_y$  sont bien évidemment les droites parallèles à l'axe  $Oy$ .
- Les lignes tangentes en tout point au vecteur  $\vec{e}_z$  sont bien évidemment les droites parallèles à l'axe  $Oz$ .

## 2 Les coordonnées cylindriques.

On peut en réalité toujours avoir recours à un repère cartésien orthonormé  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  « sous-jacent ».

Le choix d'utiliser des coordonnées cylindriques nécessite, une fois que l'on a une origine  $O$  des coordonnées, de particulariser un axe orienté passant par  $O$ , et qui sera appelé « axe polaire ». Nous supposons ici, classiquement, qu'il s'agit de l'axe  $Oz$ . Il faut par ailleurs choisir, dans le plan  $Oxy$ , une direction origine des angles  $\theta$  : il s'agit ici, classiquement, de l'axe  $Ox$ .

### 2.1 Définition.

Un point  $M$  est repéré par ses trois coordonnées :  $M(r, \theta, z)$  telles que

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$$

On se reportera à la figure 3.

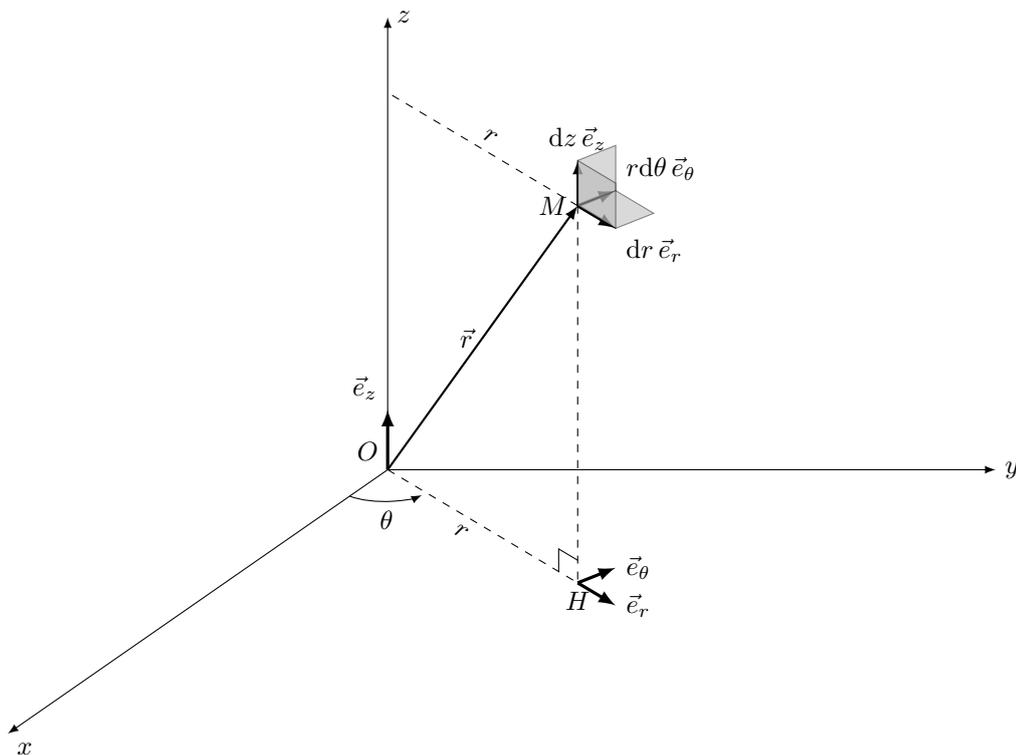


FIGURE 3 – Coordonnées cylindriques. On a représenté un point  $M(r, \theta, z)$  quelconque.  $H$  est son projeté orthogonal dans le plan  $Oxy$ . On a représenté également les trois déplacements élémentaires autour du point  $M$ , correspondant aux variations élémentaires des coordonnées  $r$ ,  $\theta$  et  $z$ . Ainsi que les surfaces élémentaires correspondantes (en grisé).

#### Remarques :

- On fera bien attention à ne surtout pas ajouter un terme en  $+\theta \vec{e}_\theta$ , qui n'aurait aucun sens (et qui par ailleurs serait totalement inhomogène!). En effet on a  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$  ( $H$  étant le projeté orthogonal de  $M$  sur le plan  $Oxy$ )

- On trouve parfois la notation  $(\rho, \theta, z)$  au lieu, comme ici, de  $(r, \theta, z)$ . La notation que nous utilisons ici a en effet un inconvénient sérieux, dont il faut être conscient : on a  $\|\vec{r}\| = \sqrt{r^2 + z^2}$ ;  $r$  n'est pas *du tout* la norme du vecteur position  $\vec{r}$ . Toutefois, la notation  $(r, \theta, z)$  est de loin la plus courante; malgré cet inconvénient, c'est celle que nous avons conservée ici.
- Il faut bien réaliser que, ici, les vecteurs  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  dépendent du point  $M$ . Plus précisément,  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  dépendent de la seule coordonnée  $\theta$  : on examinera en détail la figure 4.
- Le vecteur  $\vec{e}_z$  est exactement le même que celui du repère cartésien orthonormé sous-jacent.
- La coordonnée  $r$  est toujours positive.
- L'angle  $\theta$  est défini module  $2\pi$ . On peut convenir de retenir sa valeur dans un intervalle d'amplitude  $2\pi$ , comme par exemple  $]-\pi, +\pi]$  ou  $[0, 2\pi[$ .

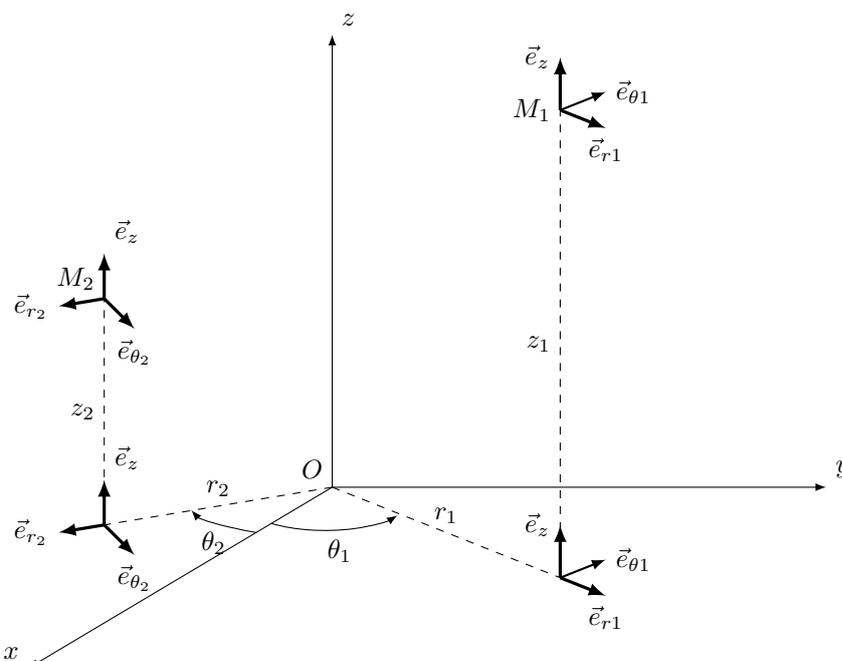


FIGURE 4 – Cette figure montre bien que les vecteurs  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  dépendent de la coordonnée  $\theta$  (et de celle-ci seulement), alors que le vecteur  $\vec{e}_z$  est indépendant du point  $M$ .

- Si  $r$  varie de  $dr$ , alors  $\vec{r}$  varie de  $d\vec{r} = dr \vec{e}_r$
- Si  $\theta$  varie de  $d\theta$ , alors  $\vec{r}$  varie de  $d\vec{r} = r d\theta \vec{e}_\theta$
- Si  $z$  varie de  $dz$ , alors  $\vec{r}$  varie de  $d\vec{r} = dz \vec{e}_z$

Et, en général,

$$d\vec{r} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$$

## 2.2 Les surfaces élémentaires :

Elles sont représentées en grisé sur la figure 3.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{d^2 S_z} &= r dr d\theta \vec{e}_z \\ \overrightarrow{d^2 S_\theta} &= dr dz \vec{e}_\theta \\ \overrightarrow{d^2 S_r} &= r d\theta dz \vec{e}_r \end{aligned}$$

## 2.3 Le volume élémentaire :

$$d^3\tau = dr \times r d\theta \times dz = r dr d\theta dz$$

Ce volume élémentaire est représenté sur la Figure 5.

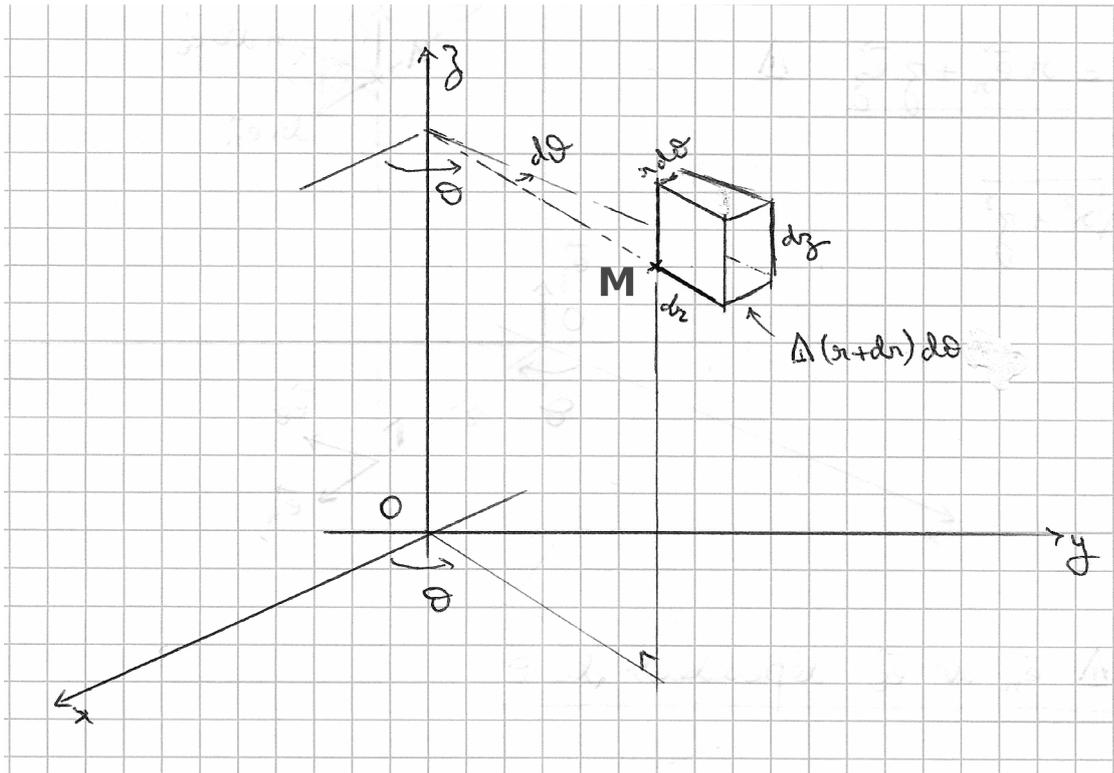


FIGURE 5 – Représentation du volume élémentaire en coordonnées cylindriques.

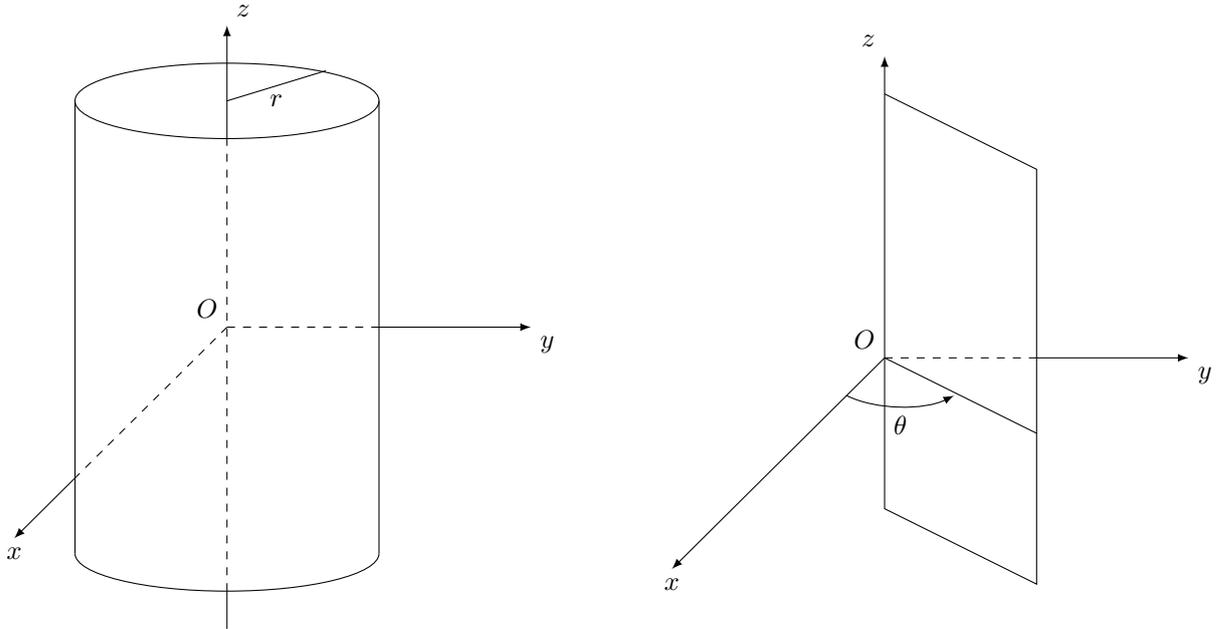
## 2.4 Lien avec les coordonnées cartésiennes.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ z = z \end{cases}$$

## 2.5 Surfaces particulières.

- Les surfaces d'équation  $r = \text{cte}$  sont les cylindres de révolution d'axe  $Oz$  (figure à gauche ci-dessous).
- Les surfaces d'équation  $\theta = \text{cte}$  sont les demi-plans limités par l'axe  $Oz$  (figure à droite ci-dessous).
- Les surfaces d'équation  $z = \text{cte}$  sont les plans parallèles au plan  $Oxy$ .



## 2.6 Lignes particulières.

- Les lignes tangentes en tout point au vecteur  $\vec{e}_r$  sont les droites passant par l'axe  $Oz$  et perpendiculaires à l'axe  $Oz$  (voir la figure 6).
- Les lignes tangentes en tout point au vecteur  $\vec{e}_\theta$  sont les cercles centrés sur l'axe  $Oz$  et situés dans des plans perpendiculaires à l'axe  $Oz$  (voir la figure 7).
- Les lignes tangentes en tout point au vecteur  $\vec{e}_z$  sont les droites parallèles à l'axe  $Oz$ .

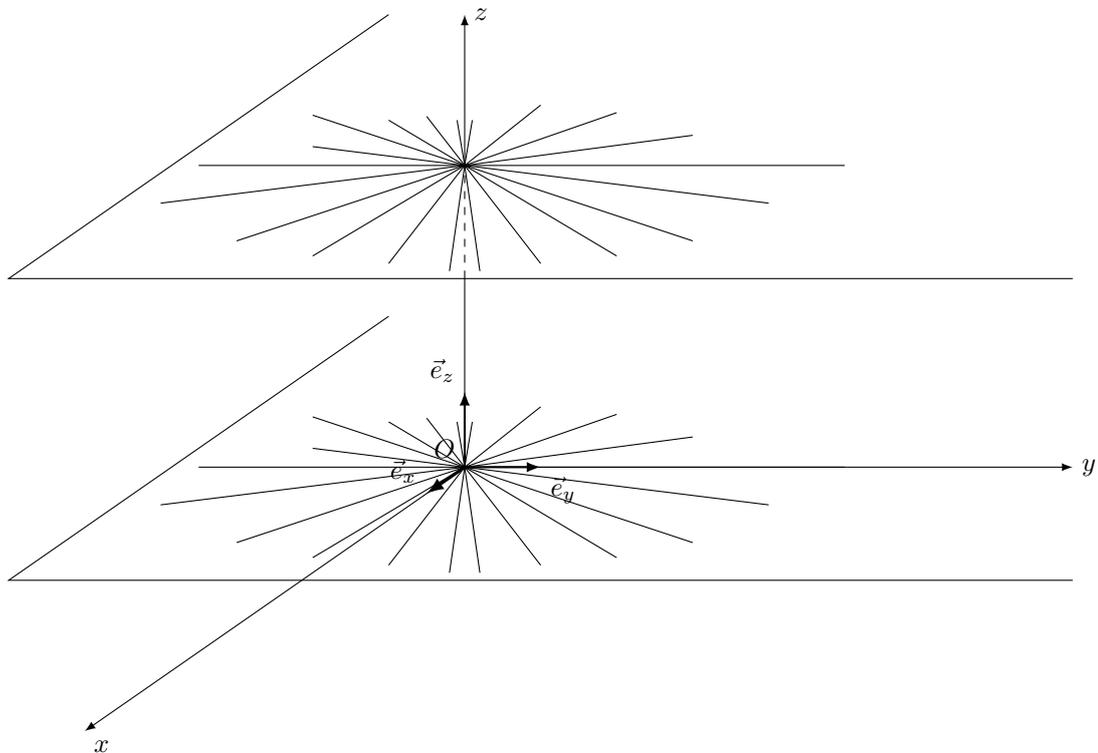


FIGURE 6 – On a représenté ici des lignes tangentes en tout point au vecteur  $\vec{e}_r$ , dans deux plans particuliers d'équation  $z = \text{cte}$ .

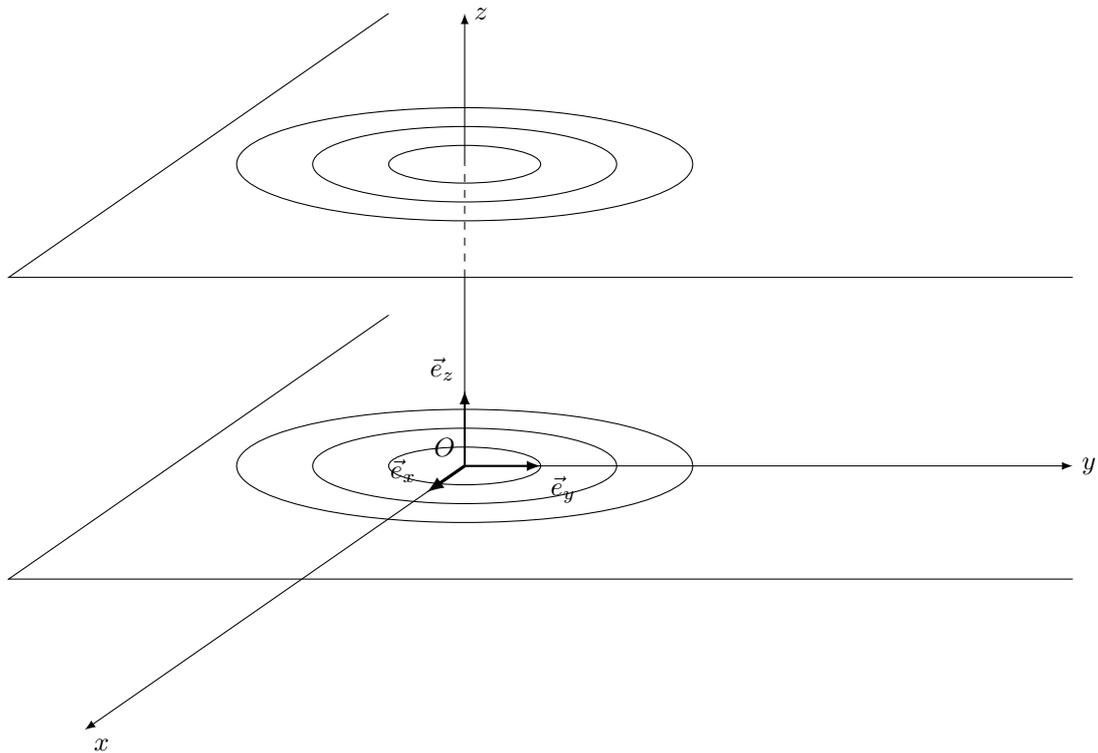


FIGURE 7 – On a représenté ici des lignes tangentes en tout point au vecteur  $\vec{e}_\theta$ , dans deux plans particuliers d'équation  $z = \text{cte}$  : il s'agit de cercles centrés sur l'axe  $Oz$ .

### 3 Les coordonnées sphériques.

On peut en réalité toujours avoir recours à un repère cartésien orthonormé  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  « sous-jacent ».

Le choix d'utiliser des coordonnées sphériques nécessite, une fois que l'on a une origine  $O$  des coordonnées, de particulariser un axe orienté passant par  $O$ , et qui sera appelé « axe polaire ». Nous supposons ici, classiquement, qu'il s'agit de l'axe  $Oz$ . Il faut par ailleurs choisir une origine des longitudes  $\varphi$  : il s'agit ici, classiquement, du plan méridien  $Oxz$ .

#### 3.1 Définition.

Un point  $M$  est repéré par ses trois coordonnées :  $M(r, \theta, \varphi)$  telles que

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$$

L'angle  $\theta$  est appelé la *colatitude*, l'angle  $\varphi$  la *longitude*.

Remarques :

- La coordonnée  $r$  est toujours positive.
- L'angle  $\theta$  est dans l'intervalle  $[0, \pi]$ .
- L'angle  $\varphi$  est dans un intervalle d'amplitude  $2\pi$  ; on peut prendre par exemple  $]-\pi, +\pi]$ , ou bien  $[0, 2\pi[$ . Il est de toutes les façons défini modulo  $2\pi$ . Il est à noter qu'il coïncide avec l'angle  $\theta$  des coordonnées cylindriques.
- À la surface de la Terre, les géographes ont choisi d'utiliser la latitude  $\lambda$  plutôt que la colatitude  $\theta$ . On notera que  $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$  ( $\lambda$  vaut  $+\frac{\pi}{2}$  au pôle nord, et  $-\frac{\pi}{2}$  au pôle sud).
- Ici, et au contraire du cas des coordonnées cylindriques, on a bien  $|\vec{r}| = r$ .
- Les vecteurs  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$  et  $\vec{e}_\varphi$  dépendent du point  $M$ . Plus précisément,  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  dépendent de  $\theta$  et de  $\varphi$  ;  $\vec{e}_\varphi$ , lui, ne dépend que de  $\varphi$ . Observer cela en détail sur la figure 8.

Si  $r$  varie de  $dr$ , alors  $\vec{r}$  varie de  $\vec{dr} = dr \vec{e}_r$ .

Si  $\theta$  varie de  $d\theta$ , alors  $\vec{r}$  varie de  $\vec{dr} = r d\theta \vec{e}_\theta$ .

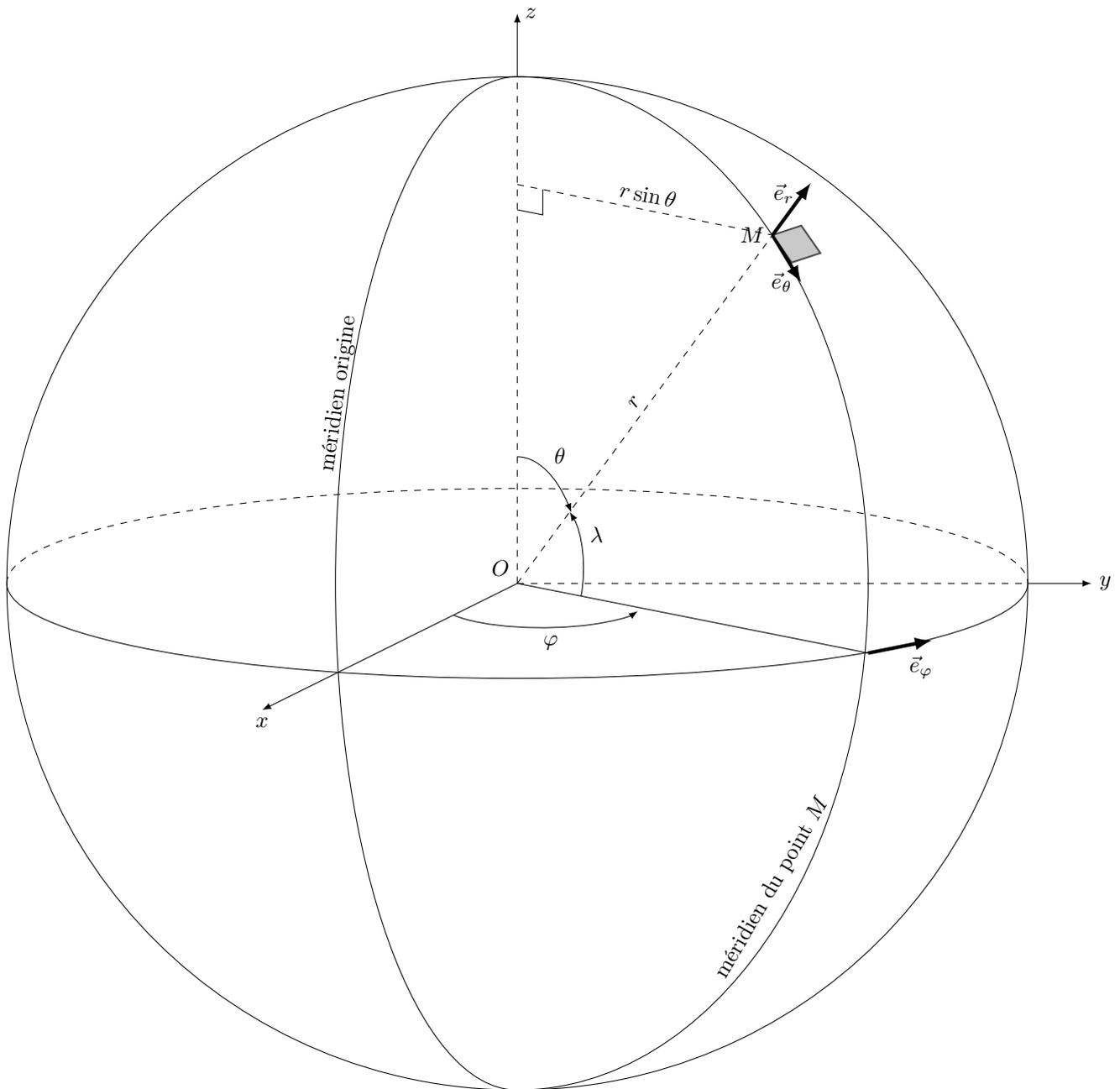


FIGURE 8 – Les coordonnées sphériques. On a représenté un point  $M(r, \theta, \varphi)$  quelconque. Ainsi que les vecteurs unitaire  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$  et  $\vec{e}_\varphi$  à la position de ce point  $M$  (pour ce dernier, il est « pratique » de le tracer en fait dans le plan équatorial, comme on le voit sur la figure). On a tracé également le cercle intersection du plan équatorial avec la sphère de rayon  $r$ , et les cercles intersections de cette même sphère avec les plans méridien origine et plan méridien du point  $M$  (ces cercles sont ici appelés « méridiens » tout court).

Si  $\varphi$  varie de  $d\varphi$ , alors  $\vec{r}$  varie de  $d\vec{r} = r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$ .

Et, en général,

$$\boxed{d\vec{r} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi}$$

### 3.2 Les surfaces élémentaires :

Une seule d'entre elles a été représentée en grisé sur la figure 8, celle d'aire  $r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{d^2 S_r} &= r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{e}_r \\ \overrightarrow{d^2 S_\theta} &= r \sin \theta \, d\varphi \, dr \, \vec{e}_\theta \\ \overrightarrow{d^2 S_\varphi} &= r \, dr \, d\theta \, \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

### 3.3 Le volume élémentaire :

$$d^3\tau = dr \times r d\theta \times r \sin \theta d\varphi = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

Ce volume élémentaire est représenté sur la figure 9.

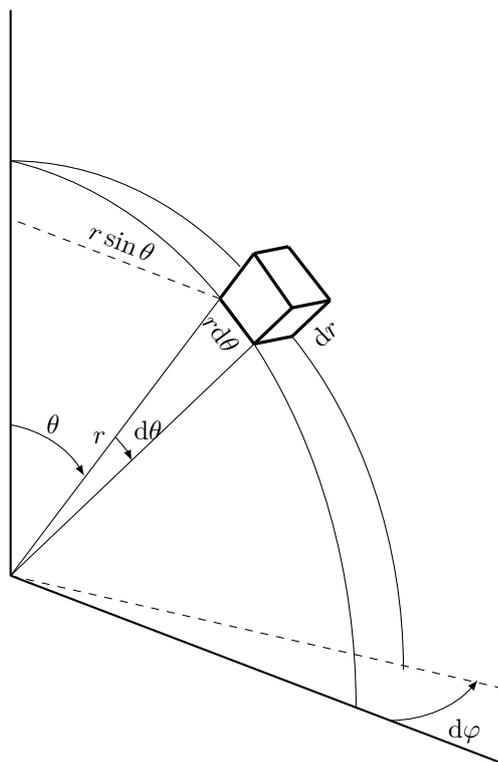


FIGURE 9 – Représentation du volume élémentaire en coordonnées sphériques.

### 3.4 Lien avec les coordonnées cartésiennes.

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \cos \varphi = \frac{x}{r \sin \theta} = \frac{x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{x^2 + y^2} \\ \sin \varphi = \frac{y}{r \sin \theta} = \frac{y \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

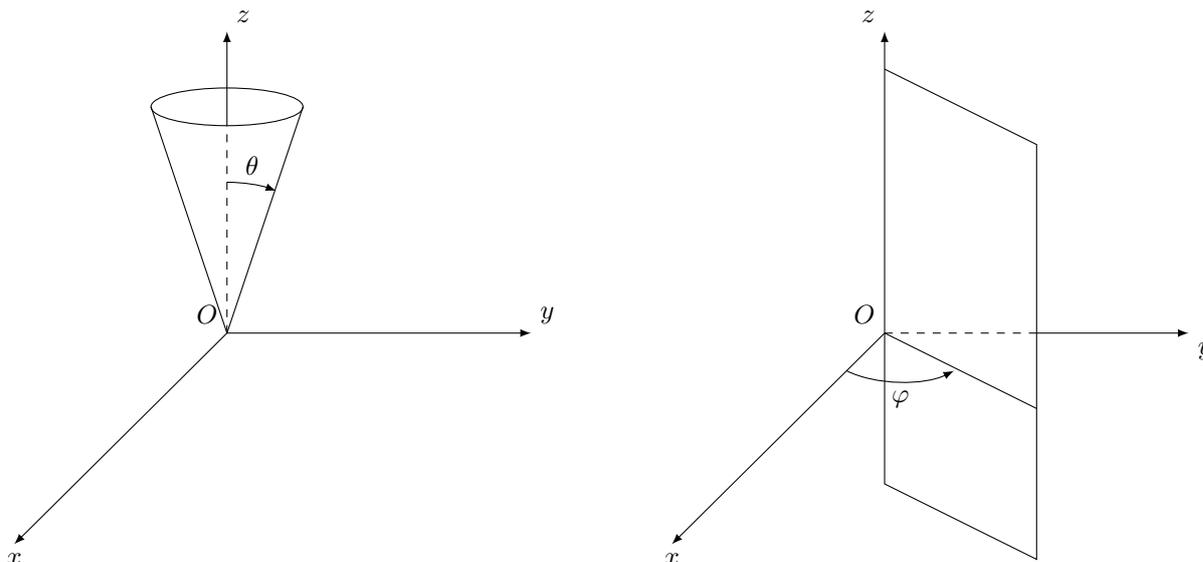
$\theta$  est parfaitement déterminé dès que l'on connaît  $\cos \theta$ , puisqu'il est dans  $[0, \pi]$ . Il n'est donc pas utile, dans les formules de droite, de donner  $\sin \theta$ .

Les formules de droite ne sont pas à connaître (sauf la première, très simple) ; elles se retrouvent, au besoin, assez facilement à partir de celles de gauche.

### 3.5 Surfaces particulières.

— Les surfaces d'équation  $r = \text{cte}$  sont les sphères de centre  $O$  de rayon  $r$ .

- Les surfaces d'équation  $\theta = \text{cte}$  sont les demi-cônes de sommet  $O$  d'axe  $Oz$  de demi-angle au sommet  $\theta$ .
- Les surfaces d'équation  $\varphi = \text{cte}$  sont des demi-plans (aussi appelés plans méridiens) limités par l'axe polaire  $Oz$ .



### 3.6 Lignes particulières.

- Les lignes tangentes en tout point au vecteur  $\vec{e}_r$  sont les droites passant par  $O$ .
- Les lignes tangentes en tout point au vecteur  $\vec{e}_\theta$  sont les cercles contenus dans des plans méridiens et admettant l'axe polaire  $Oz$  pour diamètre.
- Les lignes tangentes en tout point au vecteur  $\vec{e}_\varphi$  sont les cercles contenus dans les plans horizontaux et centrés sur l'axe polaire  $Oz$ .

### 3.7 Lien avec les coordonnées géographiques à la surface de la Terre.

Les coordonnées sphériques sont celles qui ont été choisies de très longue date pour se repérer à la surface de la Terre, que l'on peut en pratique assimiler à une sphère de rayon  $R_T = 6371$  km. On n'a donc besoin que de deux coordonnées a priori pour se repérer sur cette *surface* (le rayon est fixé).

Comme indiqué au paragraphe 3.1, c'est la latitude  $\lambda$  qui a été choisie, plutôt que la colatitude  $\theta$ , préférée par les mathématiciens. On se référera également à la figure 8.

En ce qui concerne la latitude  $\lambda$ , elle varie donc de  $-\frac{\pi}{2}$  (au pôle Sud géographique) à  $+\frac{\pi}{2}$  (au pôle Nord).

Pour la longitude  $\varphi$ , il a fallu choisir un méridien origine. La « bataille » a longtemps fait rage entre les Anglais et les Français à ce sujet, chaque pays privilégiant un méridien bien particulier : celui de Paris pour les Français, celui de Greenwich pour les Anglais. Le méridien de Paris est celui qui passe par le centre de l'Observatoire de Paris. Le méridien de Greenwich est le méridien qui passe par le centre de l'Observatoire Royal du Royaume-Uni (Greenwich est un quartier de Londres).

Il faut bien reconnaître que, actuellement, ce sont les Anglais qui ont « gagné » ; la totalité des pays ont adopté le méridien de Greenwich comme méridien origine des longitudes.

Les Français se sont « accrochés » longtemps ; jusque vers l'an 2000, les cartes au 1/25000ème de l'IGN comportaient les deux longitudes, repérées aussi bien par rapport au méridien de Greenwich que par rapport au méridien de Paris : voir la figure 10.

Pour votre culture générale toujours, il reste des traces (voire plus que des traces) du méridien de Paris en France :

- Dans la ville de Paris, outre le fait que ce méridien est tracé au sol dans l'Observatoire de Paris, il est, depuis 1994, matérialisé dans toute la ville par des médaillons discrets qui ont été placés au sol, en hommage à François Arago (il y en a 135 dans tout Paris) : voir la figure 11.
- En l'an 2000 ont été plantés dans toute la France des arbres le long de ce méridien, appelé pour l'occasion « Méridienne verte ».

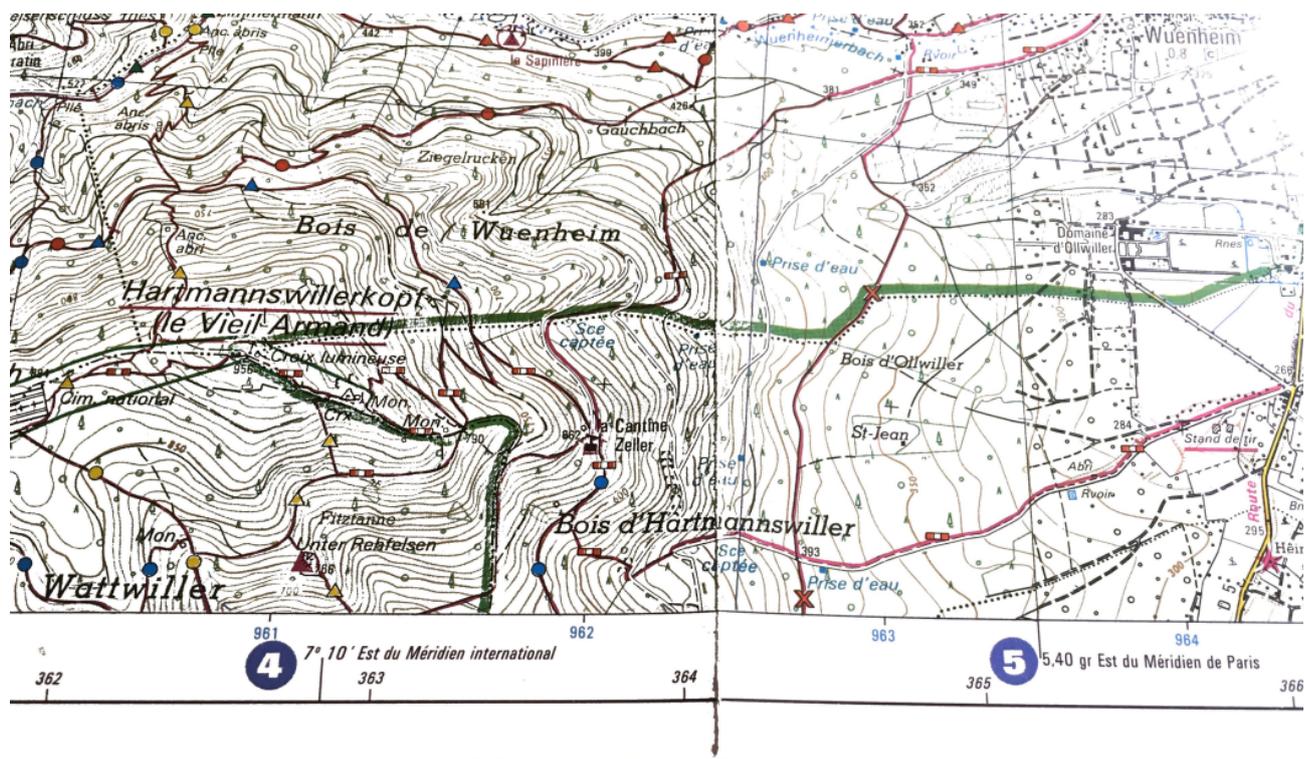


FIGURE 10 – Carte IGN de 1999. Les longitudes sont repérées aussi bien par rapport au méridien international (méridien de Greenwich) que par rapport au méridien de Paris. Ironiquement, les longitudes par rapport au méridien de Paris étaient exprimées en grades, cette unité créée, comme beaucoup d'autres, après la Révolution Française, mais que personne n'a jamais vraiment utilisée. Il semble d'ailleurs que cette unité a (enfin ?) « disparu » des derniers modèles de calculatrices.



FIGURE 11 – Médaille n° 87A de l'œuvre « Hommage à Arago », situé à Paris dans le passage de Richelieu.

## 4 Exercices.

### 4.1 Surface d'une sphère (\*\*); volume d'une boule (\*).

On considère une sphère de rayon  $R$  fixé.

- Établir par le calcul l'expression de l'aire de cette surface sphérique.

b) Établir par le calcul le volume de la boule de rayon  $R$ .

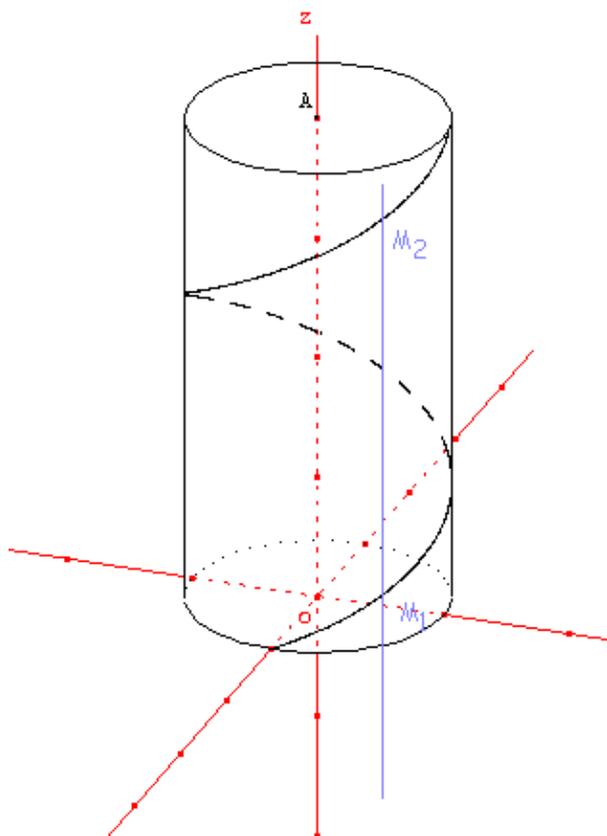
## 4.2 Longueur d'une hélice circulaire (\*\*).

Un point parcourt la courbe de représentation paramétrique, en coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} r(t) = R \\ \theta(t) = \omega t \\ z(t) = V_0 t \end{cases}$$

où  $R$ ,  $\omega$  et  $V_0$  sont trois constantes fixées, que l'on supposera strictement positives.

On indique/rappelle que la courbe parcourue est une hélice qui s'inscrit sur la surface d'un cylindre de révolution de rayon  $R$  et d'axe  $Oz$ . C'est, par exemple, la trajectoire d'une particule chargée qui évolue dans un champ magnétique uniforme et stationnaire (revoir éventuellement le cours de PCSI à ce sujet).



La hauteur totale  $H$  du cylindre est telle que l'hélice a fait exactement 1 tour (sur la figure ci-dessus, il y a un peu plus d'un tour).

On demande de déterminer l'expression littérale de la longueur  $L$  de cette hélice (sur un tour, donc), en fonction de  $R$ ,  $\omega$  et  $V_0$ .

## 4.3 Distance entre deux points à la surface de la Terre (\*\*).

On considère deux points  $M_1$  et  $M_2$ , situés à la surface de la Terre, considérée comme une sphère de rayon  $R_T = 6371$  km. Ces points sont repérés par leurs coordonnées géographiques (latitude et longitude) respectives  $(\lambda_1, \varphi_1)$  et  $(\lambda_2, \varphi_2)$ .

On indique/rappelle que le chemin le plus court pour aller, à la surface de la Terre, de  $M_1$  à  $M_2$  est une portion du « grand cercle » passant par  $M_1$  et  $M_2$  (c'est-à-dire le cercle de centre le centre  $O$  de la Terre, et passant par  $M_1$  et  $M_2$ ).

a) Déterminer l'expression littérale de la distance (à la surface de la terre) entre les points  $M_1$  et  $M_2$  ; cette distance est à exprimer en fonction de  $R_T$ ,  $\lambda_1$ ,  $\varphi_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\varphi_2$ . Indication : on pourra utiliser le produit scalaire  $\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2}$  pour d'abord déterminer l'angle entre les vecteurs  $\overrightarrow{OM_1}$  et  $\overrightarrow{OM_2}$ .

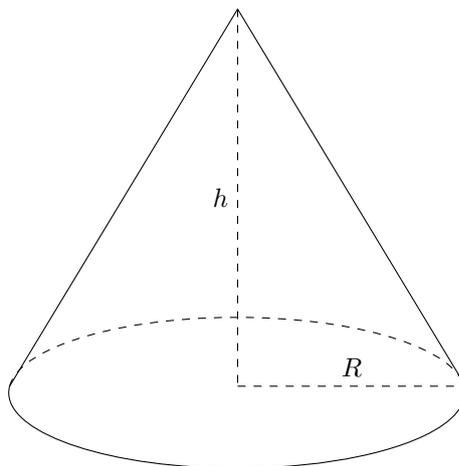
b) Application Numérique : on demande de déterminer la distance entre le patio du lycée et la Tour Eiffel, entre le patio du lycée et la salle de contrôle de l'interféromètre Ligo de Hanford.

Lieu	Latitude	Longitude
Centre du patio du lycée	+43°36'12''	+1°26'21''
Tour Eiffel	+48°51'30''	+2°17'40''
Salle de contrôle de l'interféromètre Ligo de Hanford	+46°27'19''	-119°24'27''

#### 4.4 Volume d'un cône (\*).

Vous avez dû voir la formule établie ici en collège (elle est au programme de maths du cycle 4).

On demande donc d'établir l'expression du volume du cône représenté ci-dessous.



#### 4.5 Surface et volume d'une surface axisymétrique (\*\*\*)

Cet exercice est tiré du problème de Physique du concours Mines-Ponts (2022). Les questions concernées ont apparemment été très mal réussies par la grande majorité des candidats.

### III Chapelet de gouttes d'eau sur une toile d'araignée.

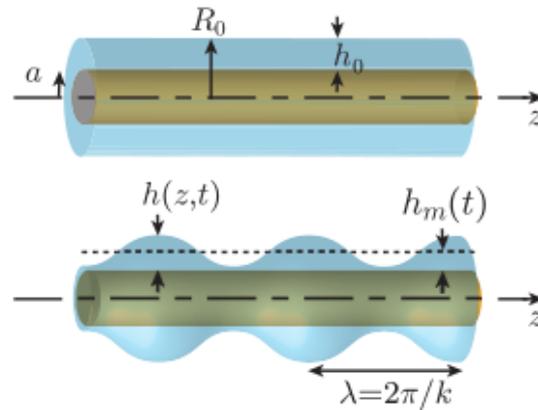
À l'aurore, très souvent, les fils de toile d'araignée se parent d'un collier formé de gouttelettes d'eau qui résultent de la condensation de la rosée. Un film mince continu d'eau se forme d'abord sur toute la longueur du fil de soie en l'enrobant, puis ce film se déstabilise en formant un chapelet de gouttelettes régulièrement espacées le long du fil (Fig. 4). Le moteur de cette instabilité est la tension superficielle  $\gamma$  ou énergie de surface entre l'eau et l'air. Chacune de ces gouttes constitue un réservoir d'eau pour l'araignée qui a tissé sa toile, laquelle n'a donc pas pour seule fonction de piéger des proies.

Cette partie du problème étudie ce phénomène connu dans la littérature sous le nom d'*instabilité de Plateau-Rayleigh*.

On rappelle qu'une variation d'aire élémentaire  $dS$  d'une interface eau/air induit une variation  $dE = \gamma dS$  de son énergie. L'aire d'une surface axisymétrique d'équation  $\rho(z)$  sur une portion de longueur  $dz$ , est donnée par :  $dS = 2\pi\rho(z)ds$  avec  $ds = dz\sqrt{1 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2}$ .



(a)



(b)

FIGURE 4 – (a) Image tirée de la revue *Pour la science*, 04 Mars 2010 – (b) Représentation schématique d'une fibre imbibée d'eau.

### III.A Approche statique

On considère un fil d'araignée cylindrique de rayon  $a$ , de longueur  $L$ , dans la direction axiale ( $Oz$ ) horizontale parfaitement rigide. Un film axisymétrique d'eau liquide de section circulaire et d'épaisseur  $h_0$  est initialement déposé sur sa surface.

Sous l'effet d'une perturbation harmonique d'amplitude  $\epsilon(t)$  et de nombre d'onde  $k = 2\pi/\lambda$ , l'épaisseur de ce film devient  $h(z,t) = h_m(t) + \epsilon(t) \cos(kz)$  où  $h_m(t) = \lambda^{-1} \int_0^\lambda h(z,t) dz$  désigne la valeur moyenne de  $h(z,t)$  sur une longueur d'onde. On parle alors de l'état modulé.

On se place dans l'approximation pour laquelle  $kL \gg 1$  et l'on suppose de plus que la modulation d'épaisseur est faible ( $\epsilon \ll h_0$  et  $ka \ll 1$ ).

- – 16. On suppose que l'eau est un fluide incompressible. Calculer, en fonction de  $R_0$ ,  $a$  et  $\lambda$ , le volume  $V$  de fluide formant initialement un film d'eau cylindrique d'épaisseur constante  $h_0$  sur une portion de longueur  $\lambda$  autour du fil.

En calculant ce même volume dans l'état modulé et en précisant les conditions d'approximation, établir la relation (1) ci-dessous qui existe entre l'épaisseur moyenne du film  $h_m(t)$  et l'amplitude de la modulation harmonique de son épaisseur  $\epsilon(t)$ ,

$$h_m(t) = h_0 - \frac{\epsilon^2(t)}{\chi R_0}, \quad (1)$$

où  $R_0 = a + h_0$  est le rayon initial du fil cylindrique imbibé d'eau et dans laquelle on précisera la valeur de l'entier  $\chi$ .

- – 17. Calculer l'énergie de surface libre  $E_0$  du film d'eau initial sur une portion de longueur  $\lambda$ . Montrer que la variation d'énergie de surface sur cette portion de fil entre l'état initial et l'état modulé s'écrit à l'ordre le plus bas en  $k\epsilon$  sous la forme :

$$\Delta E_\lambda(\epsilon) = \frac{2\pi\lambda\gamma\epsilon^2(t)}{\chi R_0} (k^2 R_0^2 - 1). \quad (2)$$

- – 18. Déterminer un critère de stabilité pour le cylindre de liquide.

---

## 5 Solutions brutes des exercices.

### 5.1 Surface d'une sphère ; volume d'une boule.

$$A = 4\pi R^2 ; V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

### 5.2 Longueur d'une hélice circulaire.

$$L = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{(R\omega)^2 + V_0^2}$$

### 5.3 Distance entre deux points à la surface de la Terre.

Patio du lycée – Tour Eiffel : 588,0 km

Patio du lycée – Hanford : 8437 km

### 5.4 Volume d'un cône.

$$\frac{1}{3}\pi R^2 h$$

### 5.5 Surface et volume d'une surface axisymétrique.

16)  $\chi = 4$

17) réponse fournie par l'énoncé

18)  $\lambda > 2\pi R_0$