Les séries de Fourier.

P. Colin

15 septembre 2024

Résumé

Ce document se veut un résumé des principaux aspects utiles en physique des séries de Fourier, qui concernent les fonctions périodiques.

Il est encore à compléter, mais il peut malgré tout déjà servir de référence ≪ technique ≫. La partie sur python n'est pas terminée du tout, et pas vraiment utilisable telle quelle.

Si vous ne deviez retenir qu'une chose, c'est bien l'équation (3), que vous devez être capable d'écrire vous-même ; il faudrait d'ailleurs presque que cela devienne un ≪ réflexe ≫ en physique : **périodique→série de Fourier**. Il ne vous sera pas demandé par contre de savoir calculer les coefficients (les s_n et les φ_n) de la décomposition.

Si certaines figures passent mal à la photocopie noir et blanc (courbes en couleur...je pense en particulier aux figures 6 et 9) il est possible de trouver ce document en couleur sur `https://physique.colin-andre.fr/`.

1 Décomposition d'une fonction périodique en série de Fourier.

1.1 La décomposition en série de Fourier.

Soit $u(t)$ une fonction *périodique* de période notée T.[1]

Cette fonction a donc une fréquence $f_1 = \frac{1}{T}$, que le physicien appellera également par la suite la fréquence ≪ fondamentale ≫.

On notera $\omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation ≪ fondamentale ≫.

On démontre alors (et on admettra ici) que $u(t)$ peut s'écrire (en toute rigueur sous certaines conditions passées ici sous silence[2]) sous la forme :

$$\boxed{u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(jn\omega_1 t\right) \qquad (1)}$$

formule dans laquelle les coefficients *complexes*[3] c_n sont donnés par :

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\exp\left(-jn\omega_1 t\right)\mathrm{d}t \qquad (2)}$$

Remarque : la fonction $u(t)$ étant périodique de période T, l'intégrale ci-dessus peut en réalité être calculée sur n'importe quel intervalle de la forme $[\tau, \tau + T]$ (puisque le terme $\exp(-jn\omega_1 t)$ admet lui aussi T comme *une* période).

1. Remarque : il est essentiel que la variable (ici notée t) soit une variable *réelle*. La fonction $u(t)$, elle, est en général complexe ; elle peut bien sûr (cas particulier très fréquent en physique) être réelle.
2. En particulier la fonction u doit être $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
3. Il est à noter que les coefficients c_n sont complexes même si la fonction $u(t)$ est réelle.

1.2 Cas particulier d'une fonction réelle.

Lorsque $u(t)$ est réelle, il est assez facile de montrer que, alors, $c_{-n} = c_n^*$ et ce, $\forall n \in \mathbb{Z}$ (et donc c_0 est réel). [4]

Dans ce cas on a alors :

$$\begin{aligned} u(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[c_n \exp\left(jn\omega_1 t\right) + c_{-n} \exp\left(-jn\omega_1 t\right)\right] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[c_n \exp\left(jn\omega_1 t\right) + c_n^* \exp\left(-jn\omega_1 t\right)\right] \end{aligned}$$

On reconnaît dans le crochet la somme d'un nombre complexe et de son complexe conjugué. Or $z+z^* = 2\Re(z)$. On pose alors $c_n = |c_n| \exp(j\varphi_n)$, où $\varphi_n = \arg(c_n)$.

Et on aboutit donc, pour une fonction $u(t)$ *réelle*, à la décomposition en série de Fourier suivante :

$$\boxed{u(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2|c_n| \cos\left(n\omega_1 t + \varphi_n\right)}$$

Que l'on peut également écrire sous la forme :

$$\boxed{\boxed{u(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} s_n \cos\left(n\omega_1 t + \varphi_n\right) \qquad \text{avec} \qquad \omega_1 = \frac{2\pi}{T}}} \tag{3}$$

où l'on a posé $s_0 = c_0$ et $s_n = 2|c_n| \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Il est à noter que tous les s_n sont réels ; s_0 est le seul d'entre eux qui peut être négatif. s_0 est bien évidemment la *valeur moyenne* de la fonction $u(t)$.

1.3 Interprétation. Spectre.

On peut interpréter l'équation (3) de la manière suivante :
$u(t)$ est la somme d'une valeur constante (sa valeur moyenne s_0), d'une sinusoïde de même fréquence f_1 qu'elle-même (cette sinusoïde est appelée « fondamental »), et d'un nombre a priori infini d'autres sinusoïdes, de fréquences multiples $f_n = nf_1$ (ces sinusoïdes sont appelées les « harmoniques »).
Les coefficients s_n fournissent les amplitudes respectives de ces sinusoïdes, et les coefficients φ_n leurs phases.

On a l'habitude en physique de représenter sous forme d'un diagramme « en bâtons » les différentes amplitudes s_n, en portant en abscisse les fréquences (ou les pulsations) correspondantes. Ce diagramme prend le nom de « spectre » de la fonction $u(t)$.

1.4 Sommes partielles.

En général (du moins pour les fonctions $u(t)$ couramment rencontrées en physique), la suite des coefficients s_n est « à peu près » décroissante [5], au moins à partir d'un certain rang, et tend vers 0.
Ce qui fait qu'il est possible d'obtenir une expression approchée pour $u(t)$ en ne gardant qu'un nombre fini de termes dans la somme (3) :

4. La démonstration (que vous pouvez faire) repose sur le fait que $u(t) = u^*(t)$, et sur l'unicité de la décomposition de $u(t)$ en série de Fourier.

5. Désolé pour le peu de rigueur de cette notion... On pourra toutefois regarder le spectre de la troisième fonction présentée ci-dessous (figure 8), pour se faire une idée de ce que l'on veut dire.

$$u(t) \approx s_0 + \sum_{n=1}^{n_{max}} s_n \cos\left(n\omega_1 t + \varphi_n\right) \tag{4}$$

Bien évidemment, plus n_{max} est grand, et plus la somme partielle ci-dessus (le membre de droite) doit « ressembler » à $u(t)$. En mathématique, il s'agit de qualifier la convergence de la série, sujet que nous n'aborderons pas plus précisément ici.

1.5 Exemples.

1.5.1 La fonction créneau.

On considère ici une fonction $u(t)$ en "créneau", qui prend alternativement les valeurs +1 et -1. Nous avons choisi ici une fréquence fondamentale f_1 de 250 Hz (ce qui correspond à une période de 4 ms).

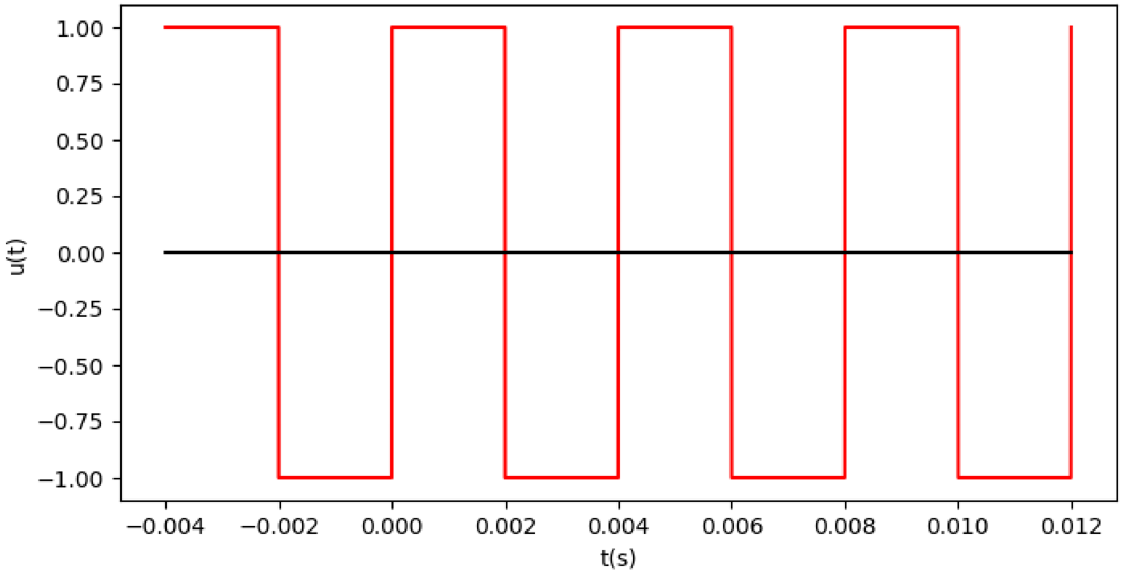

FIGURE 1 – Une fonction $u(t)$ créneau d'amplitude 1 et de fréquence $f_1 = 250$ Hz. Elle est représentée sur un intervalle de quatre périodes.

Le calcul théorique, facilement faisable, nous donne la valeur des s_n :

> s_n est nul pour n pair, et vaut $\dfrac{4}{n\pi}$ pour n impair.

Remarques :

— Il n'est pas inutile de retenir que le spectre du créneau décroît « comme $\frac{1}{n}$ » (on le voit d'ailleurs sur la Figure 2 : les extrémités des bâtons se placent sur une branche d'hyperbole).

— Le fait que les amplitudes des harmoniques de rang pair soient nulles provient de ce que le créneau est « symétrique » : les portions à +1 sont de même durée que les portions à -1.

— On observe bien sur le spectre la fréquence fondamentale (à 250 Hz), et les harmoniques, de rang impair seulement.

Regardons maintenant l'allure de quelques sommes partielles, pour des valeurs de n_{max} croissantes (1, 3, 5 et 17 pour la Figure 3).

On observe bien qu'il y a en effet « convergence » vers la fonction $u(t)$ initiale lorsque n_{max} croît.

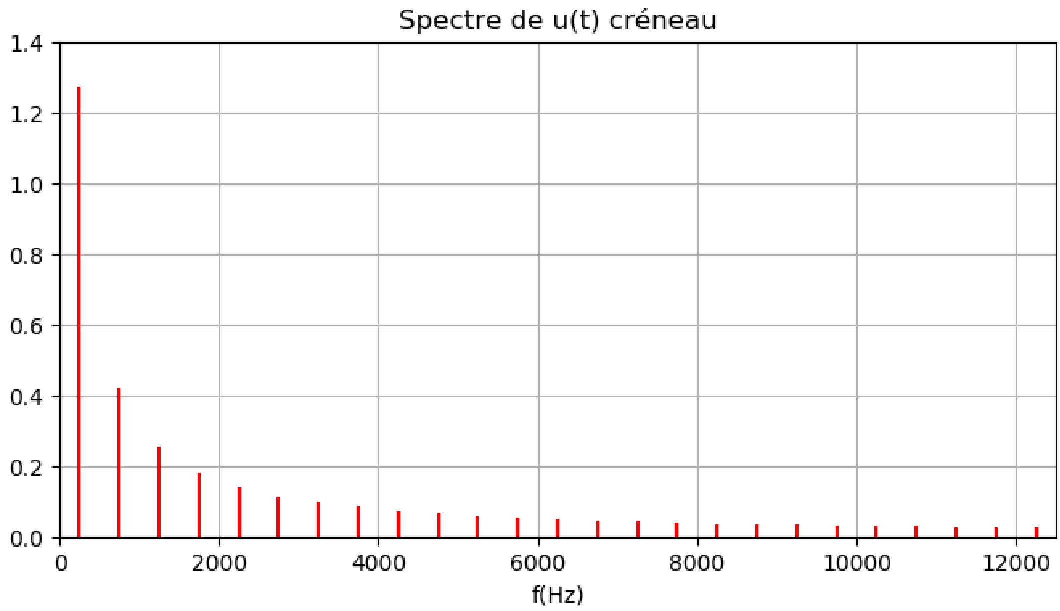

FIGURE 2 – Le spectre de la fonction créneau de la Figure 1.

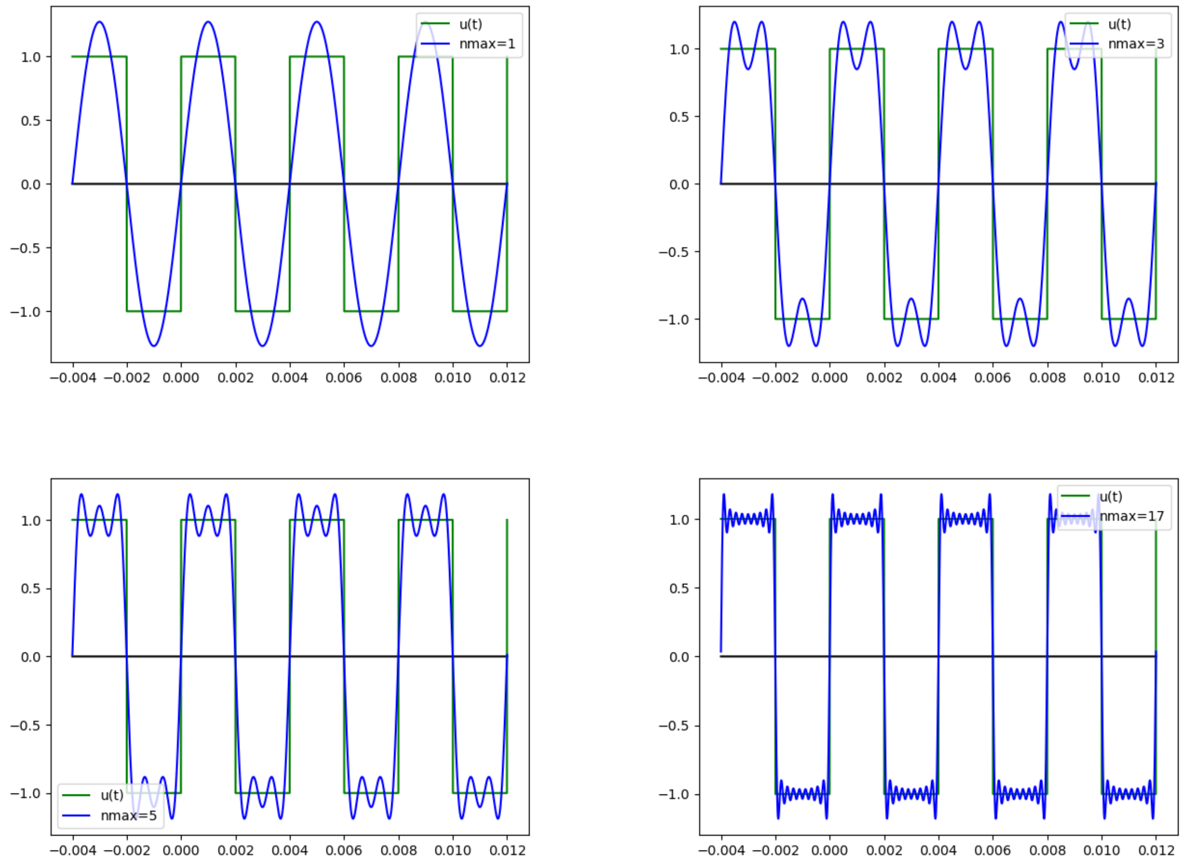

FIGURE 3 – Quatre sommes partielles pour la fonction créneau de la Figure 1. Dans chaque cas, la somme partielle est superposée à la fonction $u(t)$.

1.5.2 La fonction triangle.

On considère maintenant une fonction $u(t)$ en triangle « symétrique » , qui varie entre -1 et +1, de manière symétrique (voir Figure 4). Nous avons là encore pris une fréquence fondamentale f_1 de 250 Hz (qui correspond à une période de 4 ms).

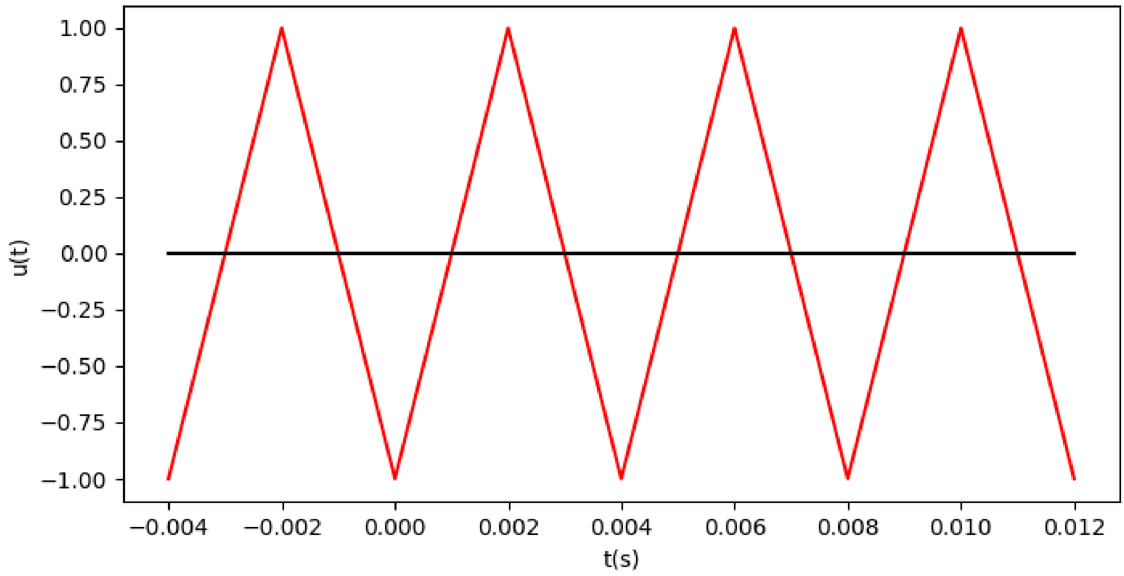

FIGURE 4 – Une fonction $u(t)$ en triangle, représentée sur quatre périodes.

Le calcul théorique, un peu plus compliqué que pour le créneau, nous donne la valeur des s_n :

s_n est nul pour n pair, et vaut $\dfrac{8}{n^2\pi^2}$ pour n impair.

Remarque :
— Il est là aussi utile de retenir que le spectre du triangle décroît « comme $\frac{1}{n^2}$ », c'est-à-dire beaucoup plus rapidement que celui du créneau (ce qui se voit de manière évidente si on compare les deux spectres). Le physicien dira que le triangle est « beaucoup moins riche en harmoniques » que le créneau.

Regardons maintenant l'allure de quelques sommes partielles, pour des valeurs de n_{max} croissantes (1, 3, 5 et 7 pour la Figure 6) :
On observe bien là aussi qu'il y a « convergence » vers la fonction $u(t)$ initiale lorsque n_{max} croît.

Remarques : Il est bon toutefois de s'arrêter quelques instants pour comparer les cas de la fonction créneau et de la fonction triangle ; la convergence des sommes partielles vers $u(t)$ semble bien meilleure pour la fonction triangle que pour la fonction créneau, mais il nous faut préciser ce concept, qui a deux aspects différents.

— La convergence est *plus rapide* pour la fonction triangle que pour la fonction créneau [6] ; ceci s'explique aisément par le fait que les coefficients c_n varient en $\dfrac{1}{n}$ pour le créneau et en $\dfrac{1}{n^2}$ pour le triangle.
— La convergence semble poser problème pour le créneau, au niveau de ses points de discontinuité (voir la Figure 3) : la somme partielle présente des « oscillations » d'assez haute fréquence au voisinage de ces points. C'est un phénomène parfaitement identifié, appelé « phénomène de Gibbs » . Il ne se produit pas pour le triangle, qui est une fonction continue.

6. Noter à cet égard que l'on n'a pas présenté les mêmes sommes partielles dans les deux cas : *nmax* =1, 3, 5 et 17 pour le créneau, *nmax* =1, 3, 5 et 7 pour le triangle

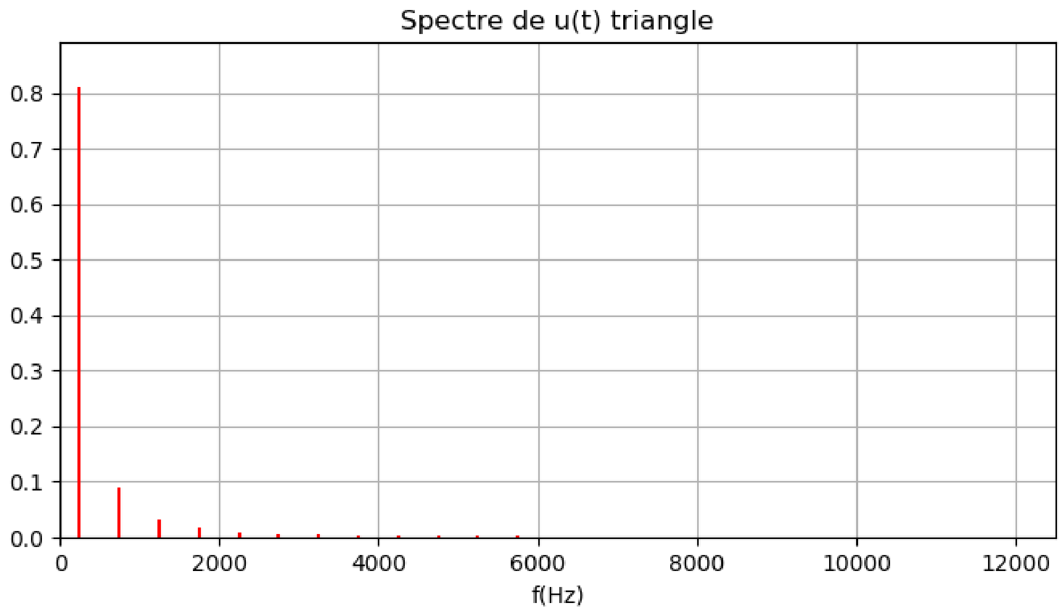

FIGURE 5 – Le spectre de la fonction $u(t)$ en triangle de la Figure 4.

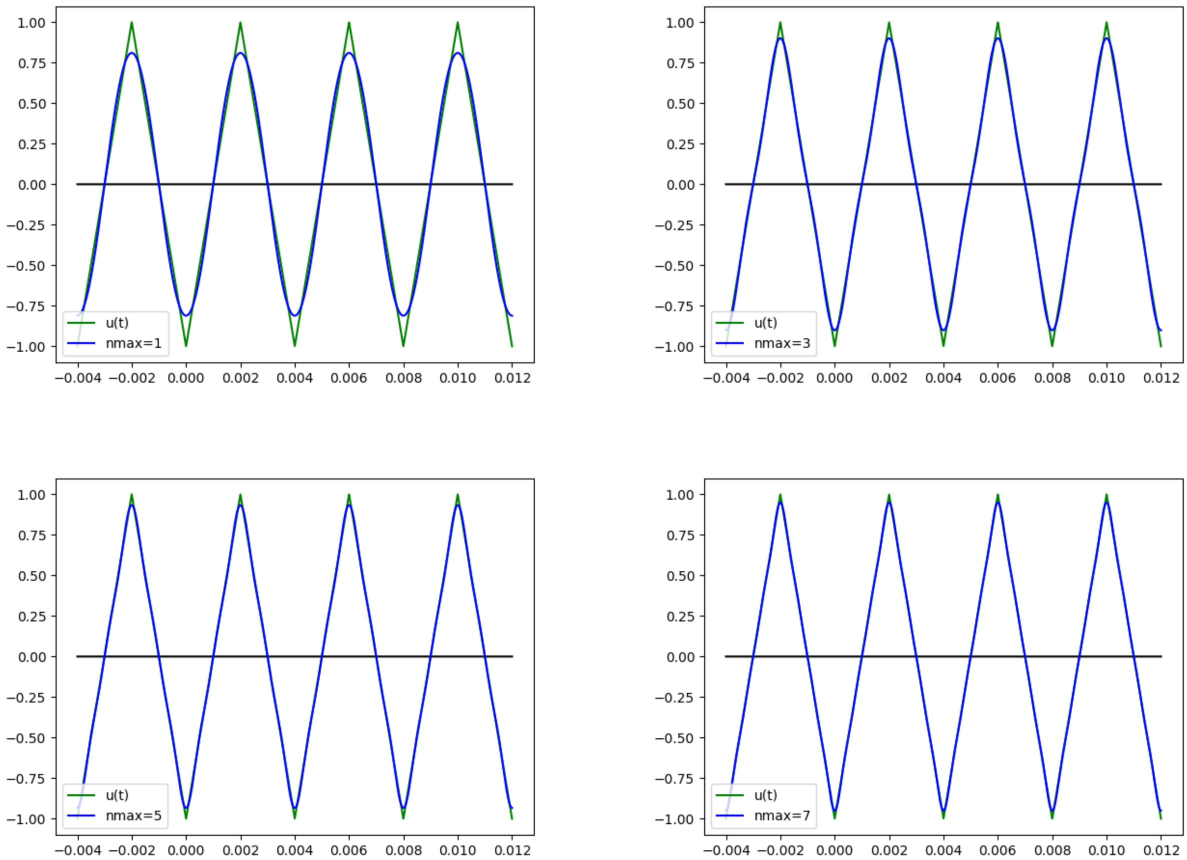

FIGURE 6 – Quatre sommes partielles pour la fonction triangle de la Figure 4. Dans chaque cas, la somme partielle est superposée à la fonction $u(t)$. On se reportera éventuellement à la version en couleurs sur `https://physique.colin-andre.fr/`.

1.5.3 Une fonction plus compliquée.

On va pour finir cette première partie s'intéresser à une fonction $u(t)$ plus ≪ compliquée ≫ : voir la Figure 7 (on a gardé une fréquence fondamentale f_1 de 250 Hz).

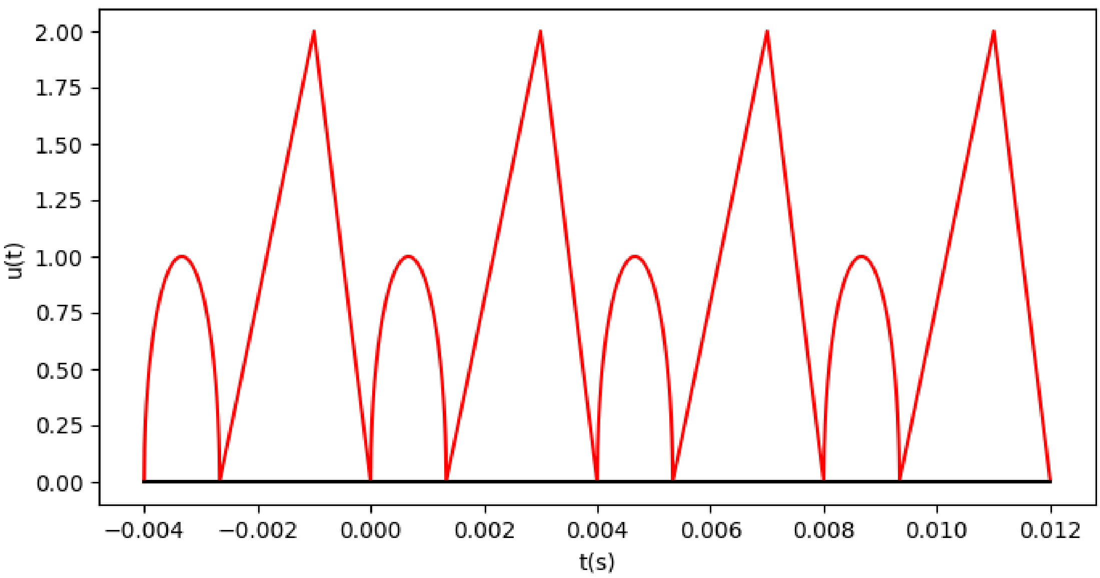

FIGURE 7 – Une fonction $u(t)$ périodique de fréquence $f_1 = 250$ Hz, représentée sur quatre périodes.

Regardons le spectre de cette fonction (Figure 8).

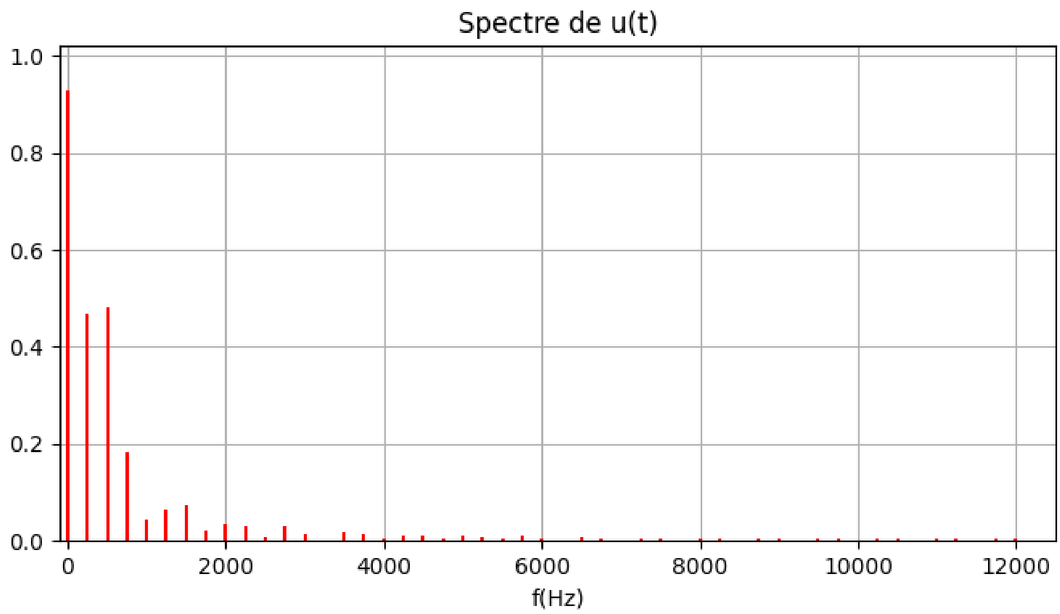

FIGURE 8 – Le spectre de la fonction $u(t)$ de la Figure 7.

Rien de bien particulier à en dire, si ce n'est que, cette fois, le coefficient s_0 est non nul : il était évident, à la vue de la fonction $u(t)$, qu'elle ne pouvait avoir une valeur moyenne nulle, puisque c'est une fonction partout positive. Sa valeur moyenne est donc légèrement supérieure à 0,9. On peut noter aussi que cette fois, tous les harmoniques sont présents, et pas seulement ceux de rang impair, comme c'était le cas pour les fonctions créneau et triangle.

Intéressons-nous maintenant aux sommes partielles (Figure 9).

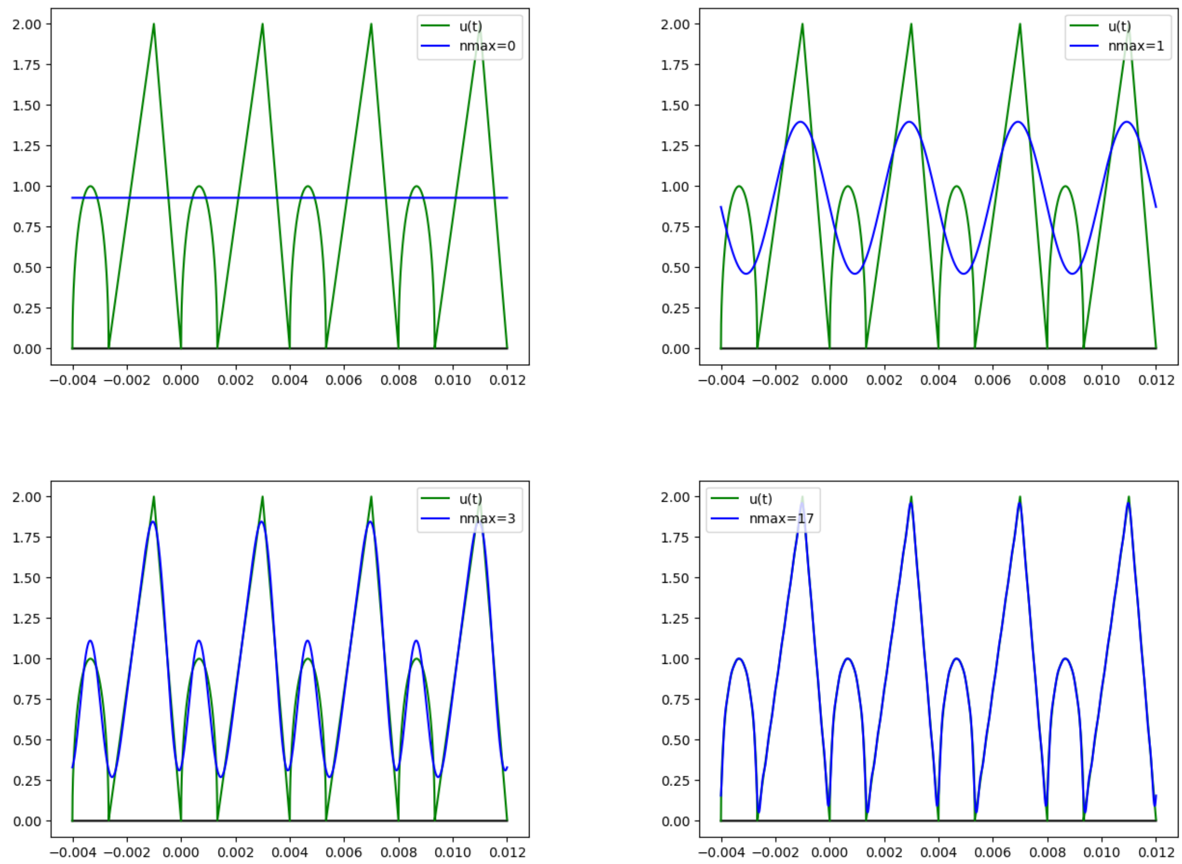

FIGURE 9 – Quatre sommes partielles pour la fonction $u(t)$ de la Figure 7. Dans chaque cas, la somme partielle est superposée à la fonction $u(t)$. On remarquera en particulier le cas $nmax = 0$: pour approximer du mieux possible la fonction $u(t)$ par une fonction constante, il convient de prendre pour cette constante la valeur moyenne de $u(t)$. On se reportera éventuellement à la version en couleurs sur `https://physique.colin-andre.fr/`.

Il n'y a pas ici de phénomène de Gibbs, puisque la fonction $u(t)$ est continue.

En espérant que cet exemple puisse vous convaincre que les séries de Fourier, ça « marche » : on peut bien reconstituer, en n'additionnant que des sinusoïdes, n'importe quelle fonction $u(t)$ périodique.

2 Mise en œuvre avec python.

Nous ne donnons ici que les grandes lignes, qui permettent de comprendre le code python utilisé. La lecture détaillée de ce paragraphe n'est pas indispensable ; toutefois le lecteur qui souhaiterait approfondir la question peut déjà se reporter à `https://www.f-legrand.fr/scidoc/docmml/numerique/tfd/analyse/analyse.html`.

Nous ne disposons de la valeur de $u(t)$ qu'en un nombre N nécessairement *fini* de points [7]. Il est donc impossible de calculer *exactement* les coefficients c_n. Pour la suite nous supposerons, ce qui ne restreint en rien la généralité du propos, que N est pair.

Supposons que nous connaissons $u(t)$ en N points, régulièrement répartis sur la période $[0, T]$ [8] :

$$t_k = 0, \frac{T}{N}, 2\frac{T}{N}, \dots, k\frac{T}{N}, \dots, (N-1)\frac{T}{N} \qquad\qquad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

et

7. On dit que la fonction u a été *échantillonnée*.

8. L'intervalle $T_e = \dfrac{T}{N}$ est appelé le *pas d'échantillonnage*, et son inverse $f_e = \dfrac{1}{T_e} = \dfrac{N}{T}$ la *fréquence d'échantillonnage*.

$$u_k = u(t_k)$$

On peut alors calculer (une approximation) des coefficients c_n (donnés par l'équation (2)) par la méthode des rectangles (méthode numérique la plus élémentaire de calcul d'une intégrale) :

$$\begin{aligned} c_n &\approx \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1} u_k \exp\left(-jn\omega_1 t_k\right)\frac{T}{N} \\ &\approx \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u_k \exp\left(-jn\frac{2\pi}{T}k\frac{T}{N}\right) \\ &\approx \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u_k \exp\left(-jn2\pi\frac{k}{N}\right) \end{aligned}$$

C'est la fonction fft de numpy.fft qui effectue le calcul de ces coefficients c_n approchés (sans le terme $\frac{1}{N}$).

Ici il est bon de s'arrêter un instant pour constater que la formule ci-dessus, a priori valable $\forall n$, définit une suite, dont il est facile de vérifier qu'elle est périodique en n de période N (vérifier simplement que, avec la formule ci-dessus, $c_{n+N} = c_n \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$).

Il est donc illusoire de vouloir calculer (même de manière approchée) *tous* les coefficients c_n de la décomposition en série de Fourier de $u(t)$: on ne peut en calculer qu'un nombre N différents. Le problème vient bien évidemment du fait qu'on ne connaît pas la fonction $u(t)$ *exacte* (ce qui nécessiterait un nombre infini de valeurs de cette fonction), mais qu'on ne dispose que de N valeurs u_k de $u(t)$.

On ne peut calculer (et de manière approchée) que N coefficients c_n : par exemple c_0, c_1, c_2, ..., c_k,..., c_{N-1}, pour k allant de 0 à $N-1$.

Mais il y a *pire* ! Il est facile de vérifier également que $c_n = c^*_{N-n}$: il n'y a en fait que $\frac{N}{2}$ coefficients c_n indépendants : c_0, c_1, c_2, ..., $c_{\frac{N}{2}-1}$. Les coefficients suivants (de $\frac{N}{2}$ à $N-1$) ne sont en fait que la copie *en miroir* des premiers (à la conjugaison près). Ils ne représentent pas les coefficients de Fourier de $u(t)$, mais sont seulement dus à son échantillonnage. On a fait attention à ne pas les représenter graphiquement dans les figures de ce document. Bien se rappeler toutefois que les coefficients c_n sont complexes : en fait, à partir de N valeurs réelles (les u_k), on a calculé $\frac{N}{2}$ coefficients complexes c_n, c'est-à-dire N coefficients réels (les parties réelles et imaginaires des c_n).

Il est à noter, d'après l'équation (1), que le coefficient c_n est associé à l'harmonique de pulsation $n\omega_1 = n\frac{2\pi}{T}$ ou de fréquence $nf_1 = n\frac{1}{T}$.

En conséquence, on voit que l'on n'obtient des coefficients c_n à peu près corrects [9] que jusqu'à la fréquence $\frac{N}{2} \times \frac{1}{T} = \frac{f_e}{2}$. C'est bien évidemment lié à la condition de Nyquist-Shannon, que l'on verra en TP dans l'année.

3 Animations interactives sur Internet.

Toutes les figures présentées dans ce document ont été réalisées avec le code Python fourni.

Toutefois, il existe de très nombreux sites sur Internet (de qualité variable) qui permettent de « jouer » de manière interactive avec les séries de Fourier. Cela peut éventuellement vous aider à vous construire une représentation mentale de ce puissant outil mathématique. Chaque site a ses avantages et ses inconvénients, insiste davantage sur certains aspects ou certaines applications que sur d'autres...

- `https://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/divers/fourier2.html` : animation très simple.
- `https://xymaths.fr/Common/Fourier/Serie-harmoniques-animation.php` : là aussi animation très simple.
- `https://phet.colorado.edu/fr/simulations/fourier-making-waves/about` : sur cette animation, on ne visualise pas la fonction qui est décomposée en série de Fourier (on voit ceci dit les sommes partielles) ; par contre on peut « entendre » les sons correspondants.

9. C'est un peu plus compliqué que cela... mais passons.