Les opérateurs vectoriels - Compléments.

P. Colin

7 septembre 2024

Résumé

Dans le cours, les opérateurs rotationnel et divergence ont été introduits à partir de leur expression en coordonnées cartésiennes. En réalité (et il en est de même pour d'autres opérateurs, tels que le gradient ou le laplacien), il s'agit d'opérateurs qui agissent sur des champs (vectoriels ou scalaires selon le cas) de manière intrinsèque, sans qu'il soit nécessaire de faire appel à un système de coordonnées quelconque.

Quelle est la *vraie* définition de l'opérateur rotationnel, de l'opérateur divergence ? Comment calcule-t-on leurs expressions en coordonnées cylindriques ou sphériques ? D'où viennent les théorèmes (ou formules) de Stokes et de Green-Ostrogradski ? Ce sont quelques unes des questions auxquelles ce document va essayer de répondre.

Le contenu de ce document n'est pas au programme de la filière PC. Le contenu du cours stricto sensu *suffit* a priori dans le cadre du programme. Ce document est destiné à ceux qui veulent aller ≪ un peu plus loin ≫.

Accessoirement il y a quelques rappels qui peuvent vraiment être utiles à tous sur les notions de forces conservatives et d'énergie potentielle associée.

1 La circulation d'un champ de vecteurs.

Avant d'aborder l'opérateur rotationnel, il est nécessaire de revenir sur cette notion, que vous avez en réalité déjà rencontrée à propos du calcul du travail d'une force.

1.1 Présentation - Définition

Définition 1 *Circulation d'un point P à un point Q d'un champ vectoriel $\vec{A}(\vec{r})$ le long d'une courbe orientée $\mathscr{C}$.*

$$C_{\mathscr{C}(P\to Q)} = \int_{\mathscr{C},P\to Q} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$$

L'intégrale doit être calculée le long de la courbe orientée $\mathscr{C}$.

On définit ci-dessus $C_{\mathscr{C}(P\to Q)}$, la circulation de P à Q, le long de la courbe orientée $\mathscr{C}$, du champ vectoriel $\vec{A}(\vec{r})$ (voir la Figure 1).

Il s'agit d'une grandeur *algébrique*.

Dans le cas particulier où la courbe $\mathscr{C}$ est fermée, alors la circulation du champ vectoriel $\vec{A}(\vec{r})$ le long de toute la courbe $\mathscr{C}$ s'écrit $C_{\mathscr{C}} = \oint_{\mathscr{C}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}r}$; il est inutile de préciser les points de départ P et d'arrivée Q puisqu'ils sont confondus, et qu'ils peuvent être situés n'importe où le long de $\mathscr{C}$, la circulation n'en dépend pas (on fait un tour complet sur $\mathscr{C}$ et un seul).

Remarque : dans le cas où le champ vectoriel $\vec{A}(\vec{r},t)$ dépend du temps t, alors la circulation dépend elle aussi de t : $C_{\mathscr{C}(P\to Q)}(t)$. Ceci ne change rien de plus à ce qui est dit dans ce document, qui peut s'appliquer à n'importe quelle date t.

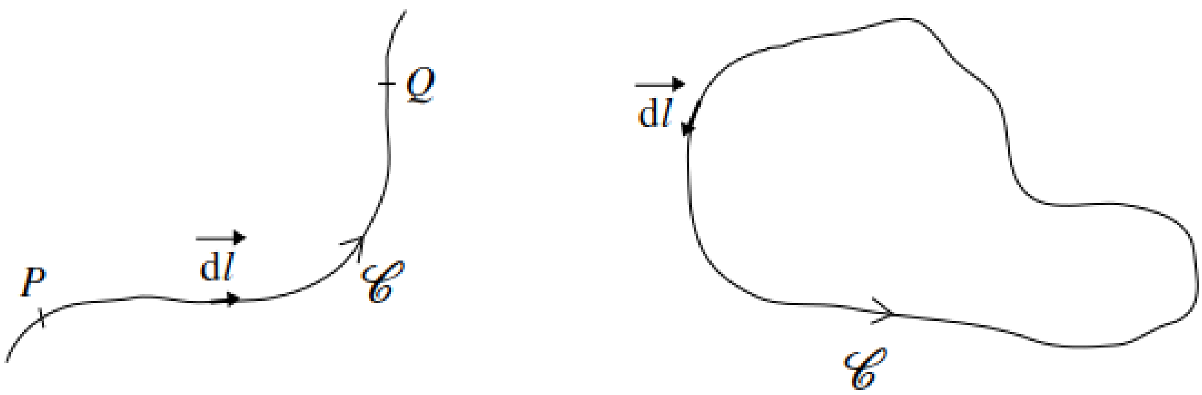

FIGURE 1 – Circulation d'un champ vectoriel $\vec{A}(\vec{r})$ le long d'une courbe ouverte (à gauche) ou fermée (à droite).

1.2 Exemple : le travail d'une force.

On suppose que l'on dispose d'un champ de force $\vec{F}(\vec{r})$: le système auquel on s'intéresse (par exemple un point matériel) est soumis à une force $\vec{F}$ qui dépend de la position $\vec{r}$ où se situe le point.

Le travail de la force $\vec{F}$ lorsque le point se déplace de P à Q en suivant le chemin $\mathscr{C}$ n'est autre que la circulation du champ $\vec{F}$ le long de $\mathscr{C}$, de P à Q : $W_{\mathscr{C}(P\to Q)} = \int_P^Q \vec{F}(\vec{r})\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}$, l'intégrale étant calculée le long de $\mathscr{C}$.

2 L'opérateur rotationnel.

2.1 Quelle est donc sa définition ?

— Il s'applique à un champ vectoriel $\vec{A}(\vec{r})$.
— Et cela donne un champ vectoriel noté $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}$ ou $\vec{\nabla}\wedge\vec{A}$.

Définition 2 *Opérateur rotationnel.*
Pour toute surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}^2S}$,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}^2S} \textit{ est la circulation de } \vec{A} \textit{ le long du bord de } \overrightarrow{\mathrm{d}^2S}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}^2S}$ *et le bord de la surface doivent être orientés conjointement.*

2.2 Retrouvons alors son expression en coordonnées cartésiennes.

Prenons par exemple un petit élément de surface $\overrightarrow{\mathrm{d}^2S}$ situé dans un plan perpendiculaire à l'axe Oz : $\overrightarrow{\mathrm{d}^2S} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\vec{e}_z$.

$\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ sont pris ici positifs (voir la Figure 2) ; $\overrightarrow{\mathrm{d}^2S}$ est donc orienté vers le haut sur la figure (il n'est pas représenté, par souci de clarté). Le contour de l'élément de surface est alors orienté conjointement avec $\overrightarrow{\mathrm{d}^2S}$ selon la règle du tire-bouchon : voir la figure.

La définition de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ vue précédemment s'écrit dans ce cas précis :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}\cdot(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\vec{e}_z) = +A_x(x,y,z)\mathrm{d}x + A_y(x+\mathrm{d}x,y,z)\mathrm{d}y - A_x(x,y+\mathrm{d}y,z)\mathrm{d}x - A_y(x,y,z)\mathrm{d}y$$

(on a pris les quatre côtés dans l'ordre, en partant du point M).

D'où l'on tire :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}\cdot(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\vec{e}_z) = -\frac{\partial A_x}{\partial y}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \frac{\partial A_y}{\partial x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

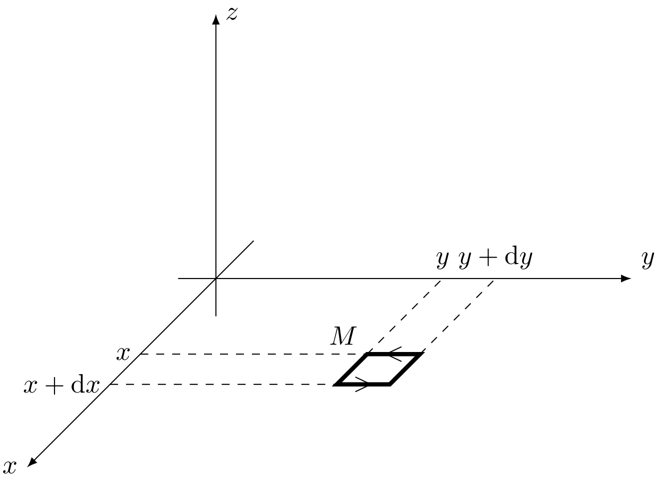

FIGURE 2 – On prend un petit élément de surface dans un plan perpendiculaire à l'axe Oz et on calcule la circulation de $\vec{A}$ le long du contour.

Après simplification par $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, on obtient bien la composante z de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ qui a été donnée dans le cours :

$$(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

Bien évidemment, on trouverait de manière similaire les composantes x et y de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$.

2.3 Et ça marche aussi en coordonnées cylindriques ou sphériques ?

La réponse est bien évidemment oui !

Pour s'en convaincre, on va prendre ici le seul cas des coordonnées sphériques (qui est le plus compliqué des deux) ; la démarche est tout à fait similaire dans le cas des coordonnées cylindriques.

Prenons par exemple un petit élément de surface $\overrightarrow{\mathrm{d}^2 S}$ à la surface d'une sphère de rayon r : $\overrightarrow{\mathrm{d}^2 S} = r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi\, \vec{e}_r$.

$\mathrm{d}\theta$ et $\mathrm{d}\varphi$ sont ici positifs (voir figure), et ce vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}^2 S}$ est orienté vers $+\vec{e}_r$, ce qui conditionne l'orientation de son pourtour (voir la Figure 3).

La définition de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}$ vue précédemment s'écrit ici :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}\cdot\left(r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_r\right) = &+A_\theta(r,\theta,\varphi)r\mathrm{d}\theta + A_\varphi(r,\theta+\mathrm{d}\theta,\varphi)\left(r\sin\left(\theta+\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\varphi\right)\\ &- A_\theta(r,\theta,\varphi+\mathrm{d}\varphi)r\mathrm{d}\theta - A_\varphi(r,\theta,\varphi)(r\sin\theta\mathrm{d}\varphi)\end{aligned}$$

Attention le calcul de la circulation que nous venons de poser est délicat et il importe de passer le temps nécessaire pour bien le comprendre. Nous avons là encore écrit les quatre contributions à la circulation sur les quatre côtés du contour, dans l'ordre où on les parcourt à partir du point M. Le point le plus délicat à bien comprendre est que les deux tronçons orientés selon $\vec{e}_\varphi$ n'ont pas la même longueur.

Le plus dur est fait, on a alors :

$$\left(r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\right)\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}\right)_r = -\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi\,r\,\mathrm{d}\theta + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\varphi\right)\mathrm{d}\theta\,r\,\mathrm{d}\varphi$$

et donc

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}\right)_r = \frac{1}{r\sin\theta}\left(-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\varphi\right)\right)$$

…ce qui est bien ce que donne le formulaire pour cette composante de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}$.

On obtiendrait les deux autres composantes de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}$ par des méthodes similaires (bien faire les schémas correspondants !).

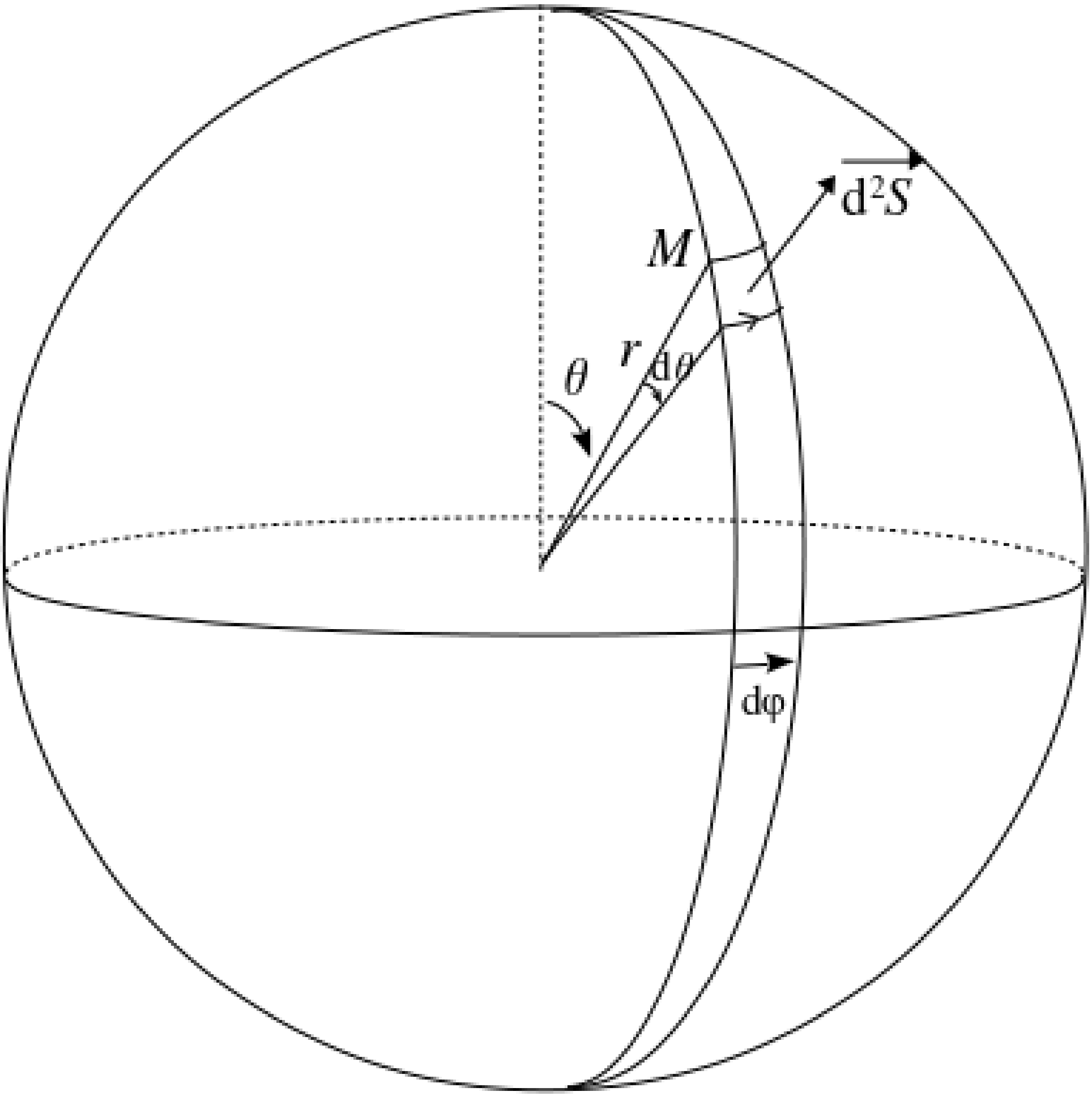

FIGURE 3 – On prend un petit élément de surface perpendiculaire à la direction radiale $\vec{e}_r$ et on calcule la circulation de $\vec{A}$ le long de son contour.

3 La formule de Stokes.

La formule de Stokes se comprend alors très facilement, à partir de la définition que l'on a donnée de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}$.

Prenons une surface S ouverte orientée, dont on note $\mathscr{C}$ le contour, qui est orienté conjointement (voir la Figure 4).

Pour chaque élément de surface $\overrightarrow{\mathrm{d}^2S}$ qui compose la surface S, on a, d'après la définition de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}^2S}$ qui est égal à la circulation de $\vec{A}$ le long du pourtour de $\overrightarrow{\mathrm{d}^2S}$.

Or chaque élement de longueur $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ de ce pourtour est commun à un autre élément de surface $\overrightarrow{\mathrm{d}^2S}$ voisin, *mais qui est alors orienté en sens inverse* ! SAUF pour les éléments $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ qui sont situés sur le contour $\mathscr{C}$, qui n'appartiennent qu'à un seul élément de surface $\overrightarrow{\mathrm{d}^2S}$.

Calculer l'intégrale double $\iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}^2S}$ revient à faire la somme de toutes les circulations de $\vec{A}$ le long des pourtours de tous les éléments de surface $\overrightarrow{\mathrm{d}^2S}$ qui constituent la surface S. Ces circulations s'annulent donc toutes deux à deux, SAUF celles des éléments $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ qui sont sur le contour $\mathscr{C}$.

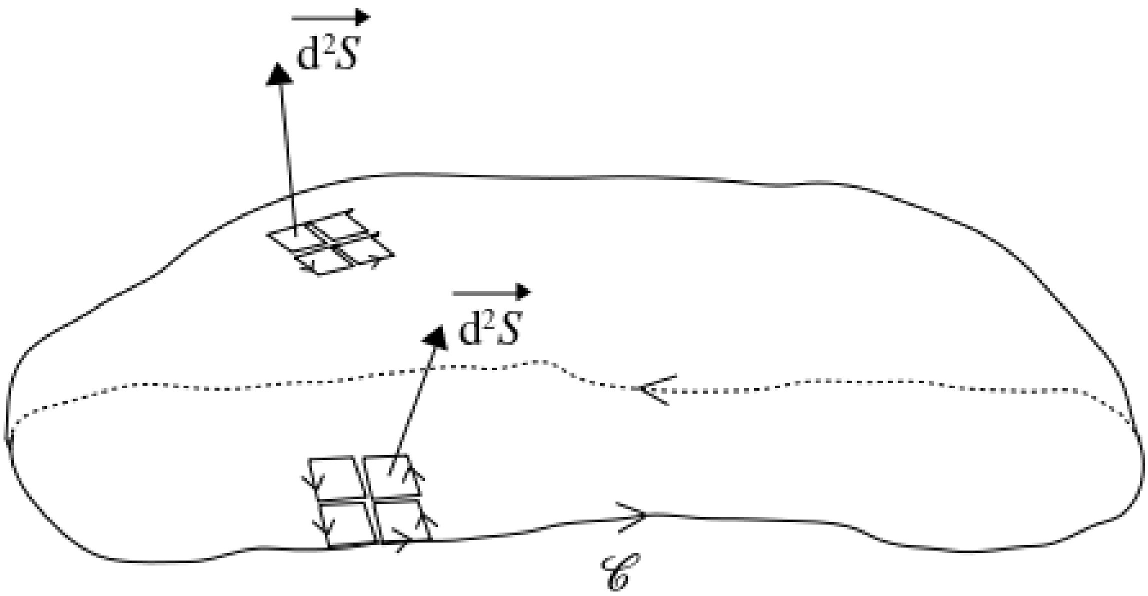

FIGURE 4 – On considère une surface ouverte S, et son contour $\mathscr{C}$, orienté conjointement. On a représenté seulement huit petits éléments de surface, dont deux seulement ont un côté situé le long de $\mathscr{C}$.

On aboutit donc sans difficulté à la formule de Stokes :

Formule 1 *Formule de Stokes.*

$$\oint_{\mathscr{C}} \vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}^2 S}$$

« La circulation est égale au flux du rotationnel »

4 Les champs à circulation conservative.

4.1 Définition.

On peut donner la définition suivante :

Définition 3 *Champ $\vec{A}(\vec{r})$ à circulation conservative.*

$\vec{A}$ *est à circulation conservative* $\Longleftrightarrow \int_P^Q \vec{A}(\vec{r}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$ *ne dépend pas du chemin* $\mathscr{C}$ *choisi pour aller de* P *à* Q.

Une définition tout à fait équivalente est alors la suivante :

Définition 4 *Champ $\vec{A}(\vec{r})$ à circulation conservative.*

$\vec{A}$ *est à circulation conservative* $\Longleftrightarrow \oint_{\mathscr{C}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = 0$ *pour* toute *courbe* fermée $\mathscr{C}$.

La démonstration de l'équivalence de ces deux définitions repose sur la Figure 5 : $\oint_{\mathscr{C}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_{\mathscr{C}_1} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_1} - \int_{\mathscr{C}_2} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_2}$.

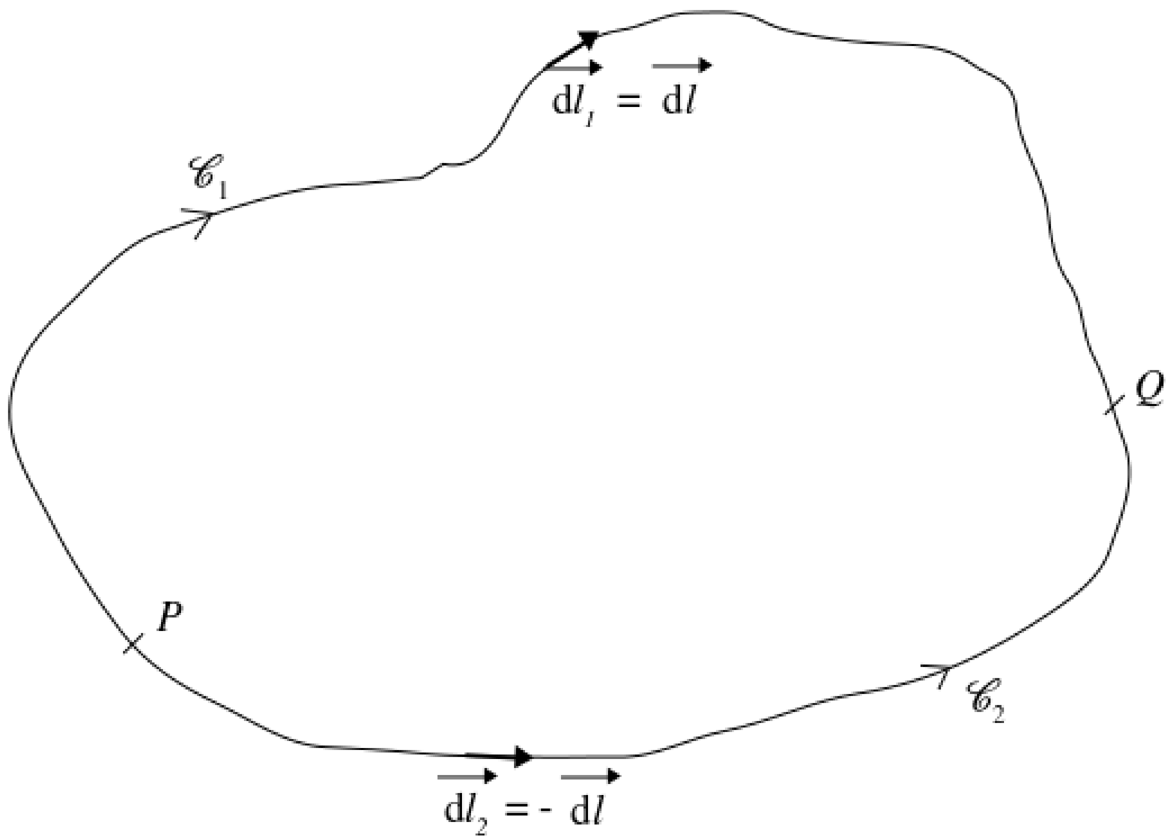

FIGURE 5 – Deux chemins ont été tracés pour aller du point P au point Q : le chemin $\mathscr{C}_1$ et le chemin $\mathscr{C}_2$. Tous deux ont été orientés de P vers Q. La courbe $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$ est une courbe fermée, dont l'orientation peut être choisie librement ; ici elle a été orientée dans le même sens que $\mathscr{C}_1$, et donc en sens opposé à $\mathscr{C}_2$.

Ces deux définitions peuvent être qualifiées de définitions *intégrales*, pour des raisons évidentes.

Mais, en utilisant la formule de Stokes, on aboutit facilement à une troisième définition d'un champ à circulation conservative, définition cette fois-ci *locale.*

En effet $\oint_{\mathscr{C}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = 0$ pour toute courbe fermée $\mathscr{C}$ est équivalent, grâce à la formule de Stokes, à :

$$\iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}^2 S} = 0$$

pour *toute* surface ouverte S.

Ceci n'est possible que si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}$ est identiquement nul :

Définition 5 *Champ $\vec{A}(\vec{r})$ à circulation conservative.*

$\vec{A}$ *est à circulation conservative* $\Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \vec{0} \qquad \forall \vec{r}$

4.2 Un champ à circulation conservative est le gradient d'un champ scalaire.

On peut démontrer que $\vec{A}(\vec{r})$ est à circulation conservative si et seulement si il existe (au moins) un champ scalaire $U(\vec{r})$ dont $\vec{A}$ est le gradient :

$$\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U$$

Mais la pratique veut que, très souvent, on préfère considérer le champ scalaire $V = -U$; on a alors

$$\vec{A} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

Il est à noter que ce champ scalaire V (souvent appelé « potentiel ») est loin d'être unique, puisqu'il est défini à une constante additive près.

4.3 La circulation d'un champ à circulation conservative est alors une différence de potentiel.

En effet, si on considère deux points P et Q, on a alors :

$$\int_P^Q \vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_P^Q -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\int_P^Q \mathrm{d}V = V(P) - V(Q)$$

On retrouve bien sur ce dernier résultat le fait que la circulation ne dépend pas du chemin $\mathscr{C}$ qui a été choisi pour aller de P à Q, mais seulement de ces deux points P et Q.

4.4 Un premier exemple : les écoulements irrotationnels.

Un tel écoulement vérifie en effet, par définition, $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v} = \vec{0} \quad \forall \vec{r}$. Et donc on peut l'écrire sous la forme $\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, \phi$, où $\phi(\vec{r})$ est appelé le « potentiel des vitesses ».

Un écoulement irrotationnel est pour cette raison également appelé un « écoulement potentiel ».

4.5 Exemple important : les forces conservatives, et l'énergie potentielle dont elles découlent.

Vous avez bien sûr vu cet exemple en PCSI, mais sans vraiment bénéficier de l'apport considérable que peuvent apporter la notion de circulation et l'opérateur gradient.

Définition 6 *Force conservative.*

Une force est conservative si son travail d'un point P à un point Q ne dépend pas du chemin suivi.

Or le travail d'une force n'est autre que la circulation de cete force.

La force est donc conservative (en fait c'est sa *circulation* qui est conservative) si et seulement si elle est le gradient d'un champ scalaire : ce champ scalaire, c'est l'opposé de l'énergie potentielle dont elle dérive.

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p$$

Et on aura donc, d'après ce qui précède :

$$W_{P \to Q}(\vec{F}) = E_p(P) - E_p(Q) = -\Delta E_p$$

ou, pour un trajet élémentaire :

$$\delta W = -\mathrm{d}E_p$$

Bien retenir ces trois équations équivalentes, qui sont en fait la définition de l'énergie potentielle pour une force conservative :

Définition 7 *Énergie potentielle pour une force conservative.*

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p$$

$$W_{P \to Q}(\vec{F}) = E_p(P) - E_p(Q) = -\Delta E_p$$

$$\delta W = -\mathrm{d}E_p$$

Prenons l'exemple le plus classique de la pesanteur : voir la Figure 6, où l'on a orienté l'axe des z vers le haut.

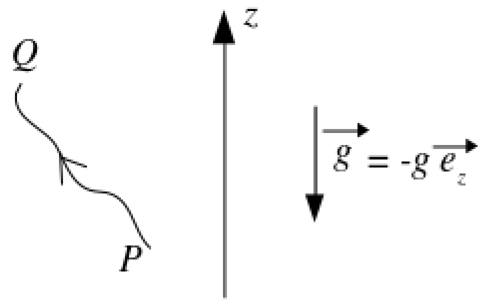

FIGURE 6 – L'axe des z est orienté vers le haut.

Les formules précédentes nous donnent alors :

$$E_p = +mgz$$
$$\overrightarrow{\text{grad}} E_p = +mg\vec{e}_z$$
$$W_{P\to Q}(m\vec{g}) = -\Delta(mgz) = mgz(P) - mgz(Q)$$

On retrouve bien, par exemple, que $W_{P\to Q}(m\vec{g}) < 0$ si Q est au-dessus de P : le travail du poids est alors négatif (le poids est résistant).

5 Le flux d'un champ de vecteurs.

Avant d'aborder l'opérateur divergence, il est nécessaire de revenir sur cette notion, que vous avez déjà rencontrée dans le chapitre sur l'induction, pour calculer un flux magnétique.

5.1 Présentation - Définition.

Définition 8 *Flux d'un champ vectoriel $\vec{A}(\vec{r})$ à travers une surface S orientée.*

$$\Phi_S = \iint_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}^2 S}$$

Voir la Figure 7.

Il s'agit d'une grandeur *algébrique*.

Dans le cas particulier où la surface S est fermée (voir Figure 8), alors le flux du champ vectoriel $\vec{A}(\vec{r})$ à travers la surface S se note $\Phi_S = \oiint_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}^2 S}$; on rappelle que, par convention, la surface S est orientée vers l'extérieur et il s'agit donc du flux *sortant*.

Remarque : dans le cas où le champ vectoriel $\vec{A}(\vec{r}, t)$ dépend du temps t, le flux dépend lui aussi de t : $\Phi_S(t) = \iint_S \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}^2 S}$. Ceci ne change rien de plus à ce qui est dit dans ce document, qui s'applique à n'importe quelle date t.

5.2 Exemples.

5.2.1 En mécanique des fluides.

Le débit volumique à travers une surface orientée S n'est autre que le flux du vecteur vitesse à travers cette surface :

$$q_{V,S} = \iint_S \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}^2 S}$$

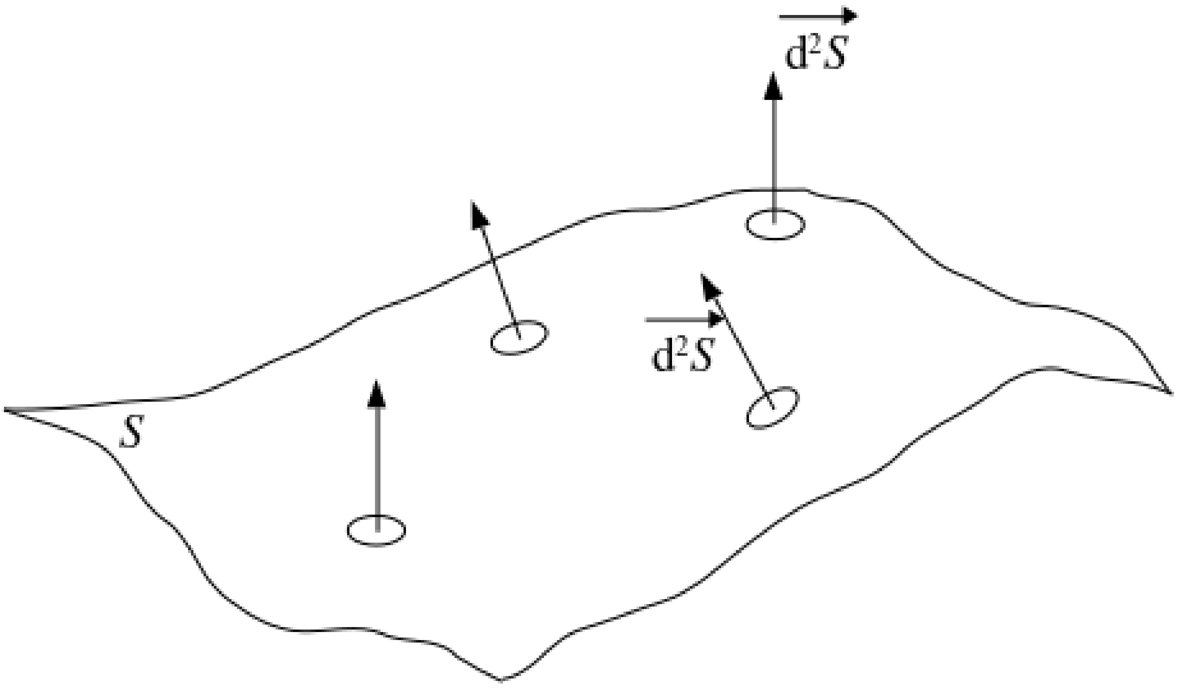

FIGURE 7 – La surface S (ici ouverte) est orientée. Le flux de $\vec{A}$ à travers la surface S est la somme des flux élémentaires $\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}^2S}$ à travers tous les éléments $\overrightarrow{\mathrm{d}^2S}$ qui composent cette surface.

Le débit massique à travers une surface orientée S n'est autre que le flux du vecteur $(\rho\vec{v})$ à travers cette surface :

$$q_{m,S} = \iint_S \rho\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}^2S}$$

5.2.2 Flux magnétique.

Le flux magnétique $\Phi(t)$ intervient dans la loi de Faraday $e(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi_S}{\mathrm{d}t}$.
Il s'agit du flux du vecteur champ magnétique $\vec{B}(\vec{r},t)$:

$$\Phi_S(t) = \iint_S \vec{B}(\vec{r},t)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}^2S}$$

6 L'opérateur divergence.

6.1 Quelle est donc sa définition ?

— Il s'applique à un champ vectoriel $\vec{A}(\vec{r})$.
— Et cela donne un champ scalaire noté $\mathrm{div}\vec{A}$ ou $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$.

Définition 9 *Opérateur divergence.*

Pour tout volume élémentaire $\mathrm{d}^3\tau$,

$$\mathrm{div}\vec{A}\,\mathrm{d}^3\tau \textit{ est le flux de } \vec{A} \textit{ sortant de } \mathrm{d}^3\tau.$$

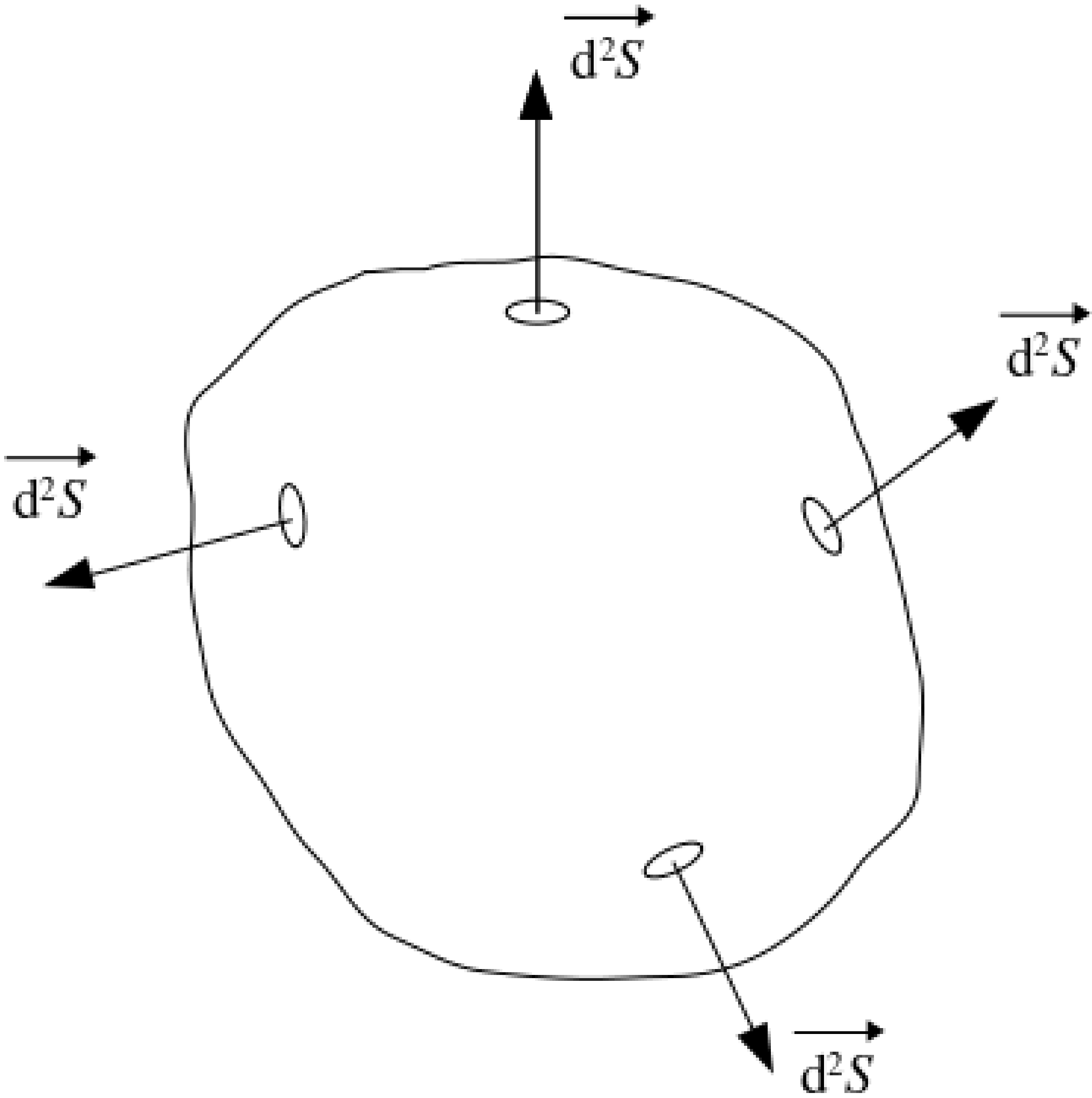

FIGURE 8 – La surface S est fermée ; elle est orientée vers l'extérieur.

6.2 Retrouvons alors son expression en coordonnées cartésiennes.

La définition de $\mathrm{div}\vec{A}$ vue précédemment s'écrit ici (voir Figure 9) :

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\vec{A}\,\mathrm{d}^3\tau = +A_x(x+\mathrm{d}x,y,z)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - A_x(x,y,z)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + A_y(x,y+\mathrm{d}y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \\ - A_y(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + A_z(x,y,z+\mathrm{d}z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - A_z(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

On a pris dans l'ordre les flux sortants de $\mathrm{d}^3\tau$ à travers : la face avant, la face arrière, la face droite, la face gauche, la face supérieure, la face inférieure.

On a donc :

$$\mathrm{div}\vec{A}\,\mathrm{d}^3\tau = \frac{\partial A_x}{\partial x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \frac{\partial A_y}{\partial y}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \frac{\partial A_z}{\partial z}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

En simplifiant par $\mathrm{d}^3\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, on retrouve bien l'expression de $\mathrm{div}\vec{A}$ donnée dans le cours :

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

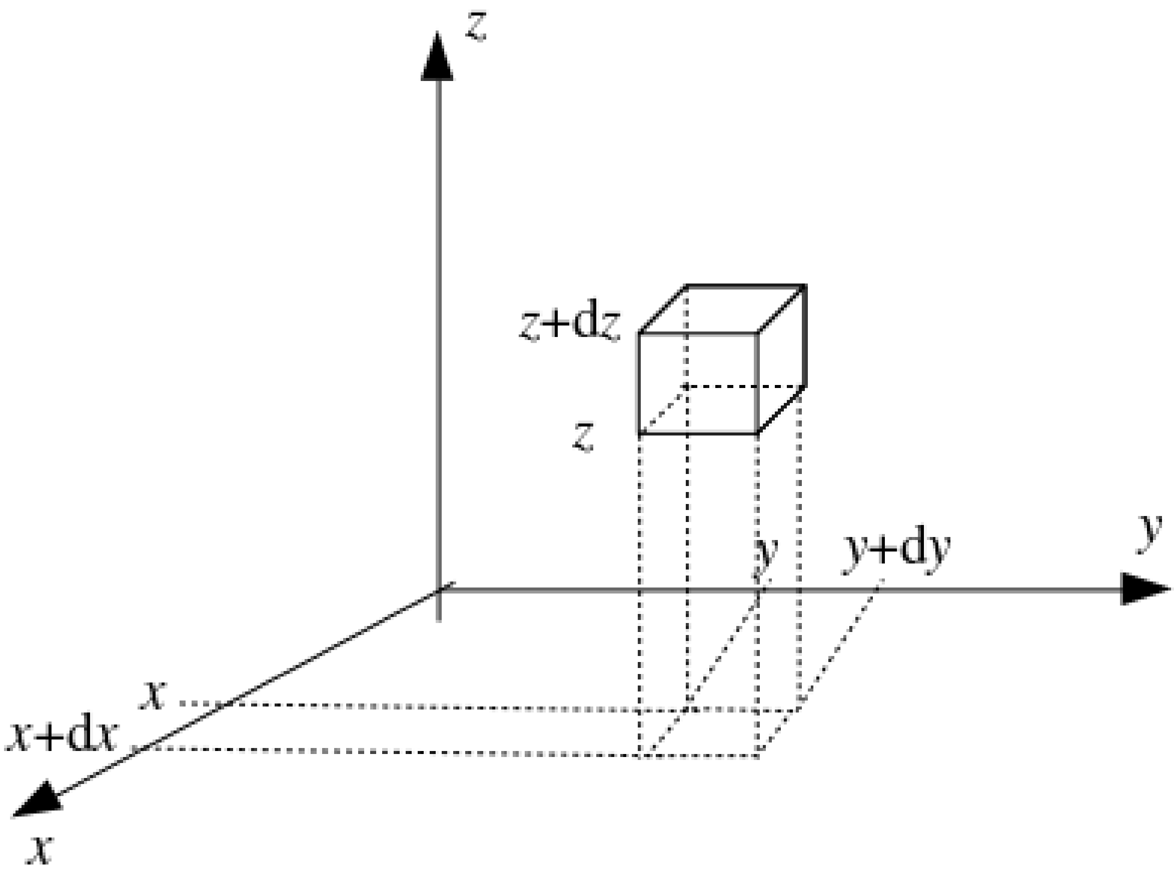

FIGURE 9 – On considère un petit élément de volume $\mathrm{d}^3\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Le point $M(x, y, z)$ est situé au coin à l'arrière du cube (le seul sommet caché sur cette figure).

6.3 Et ça marche aussi en coordonnées cylindriques ou sphériques ?

La réponse est là encore oui !

Cette fois nous allons traiter en exemple le cas des coordonnées cylindriques (voir la Figure 10). La démarche est tout à fait similaire en coordonnées sphériques.

La définition de $\mathrm{div}\vec{A}$ vue précédemment s'écrit ici :

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\vec{A}\,\mathrm{d}^3\tau = {} & A_r(r+\mathrm{d}r,\theta,z)(r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z - A_r(r,\theta,z)r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z + A_\theta(r,\theta+\mathrm{d}\theta,z)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z \\ & - A_\theta(r,\theta,z)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z + A_z(r,\theta,z+\mathrm{d}z)\mathrm{d}r\,r\,\mathrm{d}\theta - A_z(r,\theta,z)\mathrm{d}r\,r\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

On a pris dans l'ordre les flux sortants à travers : la face extérieure, la face intérieure, la face droite, la face gauche, la face supérieure, la face inférieure.

La petite difficulté à bien comprendre ici est que les faces extérieure et intérieure n'ont pas la même aire.

Il vient alors :

$$\mathrm{div}\vec{A}\,\mathrm{d}^3\tau = \frac{\partial}{\partial r}(rA_r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z + \frac{\partial A_z}{\partial z}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,r\,\mathrm{d}\theta$$

On simplifie alors par $\mathrm{d}^3\tau = \mathrm{d}r.r\,\mathrm{d}\theta.\mathrm{d}z$ pour aboutir à :

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Ce qui est bien ce que donne le formulaire.

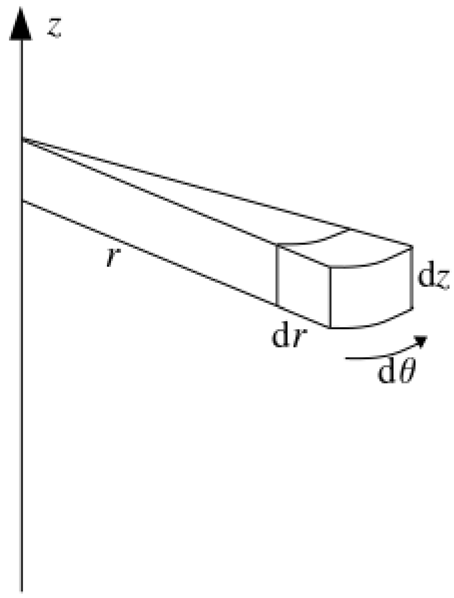

FIGURE 10 – On considère un élément de volume $\mathrm{d}^3\tau = \mathrm{d}r.r\,\mathrm{d}\theta.\mathrm{d}z$. On calcule le flux de $\vec{A}$ sortant de cet élément de volume.

7 La formule de Green-Ostrogradski.

La formule de Green-Ostrogradski apparaît alors comme une conséquence immédiate de la définition de l'opérateur divergence.

Prenons un volume V, limité par sa surface S (nécessairement fermée, donc orientée vers l'extérieur) : voir la Figure 11.

Calculer $\iiint_V \mathrm{div}\vec{A}\,\mathrm{d}^3\tau$ revient à faire la somme des flux sortants de tous les volumes élémentaires $\mathrm{d}^3\tau$ qui composent le volume V (d'après la définition de l'opérateur divergence).

Mais le flux qui sort par une face d'un volume élémentaire $\mathrm{d}^3\tau$ rentre en général dans un volume élémentaire $\mathrm{d}^3\tau$ adjacent ! Et les deux contributions correspondantes à $\iiint_V \mathrm{div}\vec{A}\,\mathrm{d}^3\tau$ s'annihilent donc.

SAUF pour les petits cubes $\mathrm{d}^3\tau$ dont une face coïncide avec la surface S du volume V (ce sont les cubes tout au bord du volume V). Et il ne reste au final que ces contributions, que rien n'annule.

Formule 2 *Formule de Green-Ostrogradski*

Pour tout volume V, dont on note S la surface (fermée),

$$\oiint_S \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}^2S} = \iiint_V \mathrm{div}\vec{A}_{,}\mathrm{d}^3\tau$$

8 Les champs à flux conservatif.

8.1 Définition.

On peut donner la définition suivante :

Définition 10 *Champ $\vec{A}(\vec{r})$ à flux conservatif.*

$\vec{A}(\vec{r})$ est à flux conservatif $\Longleftrightarrow$ le flux de $\vec{A}$ est nul à travers toute *surface S* fermée.

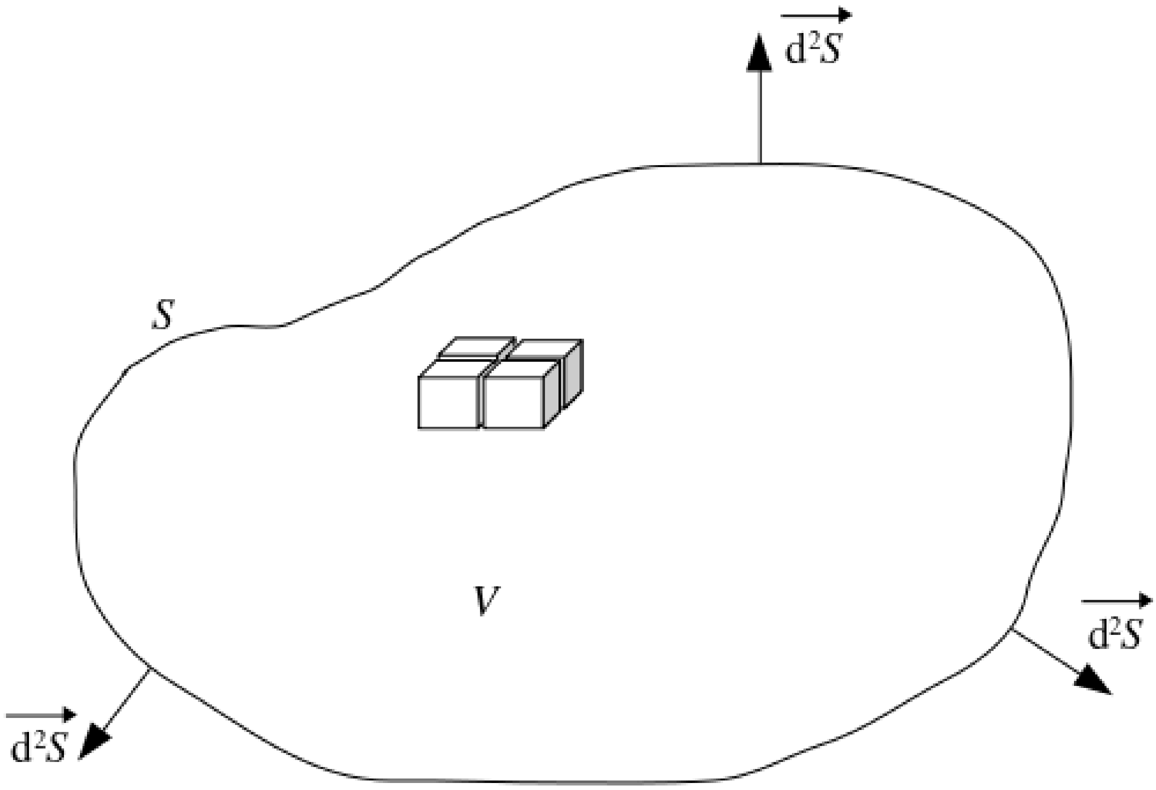

FIGURE 11 – Un volume V est limité par sa surface S. Il est composé d'un très grand nombre de volumes élémentaires $d^3\tau$; on n'en a représenté que quatre.

On peut dire qu'il s'agit ici d'une version *intégrale* de la définition, puisque cela s'écrit mathématiquement $\oiint_S \vec{A} \cdot \overrightarrow{d^2S} = 0$ pour *toute* surface S *fermée.*

Si on fait usage de la formule de Green-Ostrogradski, cela s'écrit aussi $\iiint_V \mathrm{div}\vec{A}\, d^3\tau = 0$ pour *tout* volume V.

On peut donc en tirer une autre définition *équivalente* :

Définition 11 *Champ $\vec{A}(\vec{r})$ à flux conservatif.*

$\vec{A}(\vec{r})$ *est à flux conservatif* $\Longleftrightarrow \mathrm{div}\vec{A} = 0 \qquad \forall \vec{r}$

Il s'agit ici bien sûr d'une version *locale* de la définition, puisque valable en tout point.

8.2 Exemples de champs à flux conservatif.

- Le champ de vitesses $\vec{v}(\vec{r}, t)$ d'un écoulement incompressible est à flux conservatif : voir le cours de cinématique des fluides.
- On verra dans l'année que le champ magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ est à flux conservatif, en toutes circonstances.

8.3 Un champ à flux conservatif est le rotationnel d'un autre champ vectoriel.

On peut démontrer que $\vec{A}(\vec{r})$ est à flux conservatif si et seulement si il existe (au moins) un champ vectoriel $\vec{C}(\vec{r})$ dont $\vec{A}$ est le rotationnel :

$$\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{C}$$

Il est à noter que ce champ $\vec{C}$ est loin d'être unique, puisqu'il est défini à un gradient additif près (i.e. on peut lui ajouter le gradient de n'importe quel champ scalaire).

8.4 Conséquence : le flux d'un champ conservatif à travers une surface S ouverte ne dépend en réalité que du contour $\mathscr{C}$ de la surface S.

On peut démontrer ce résultat de deux manières différentes : par une vision intégrale ou par une vision locale.

Dans les deux cas on considère une surface S *ouverte*, et son contour $\mathscr{C}$, orientés conjointement.

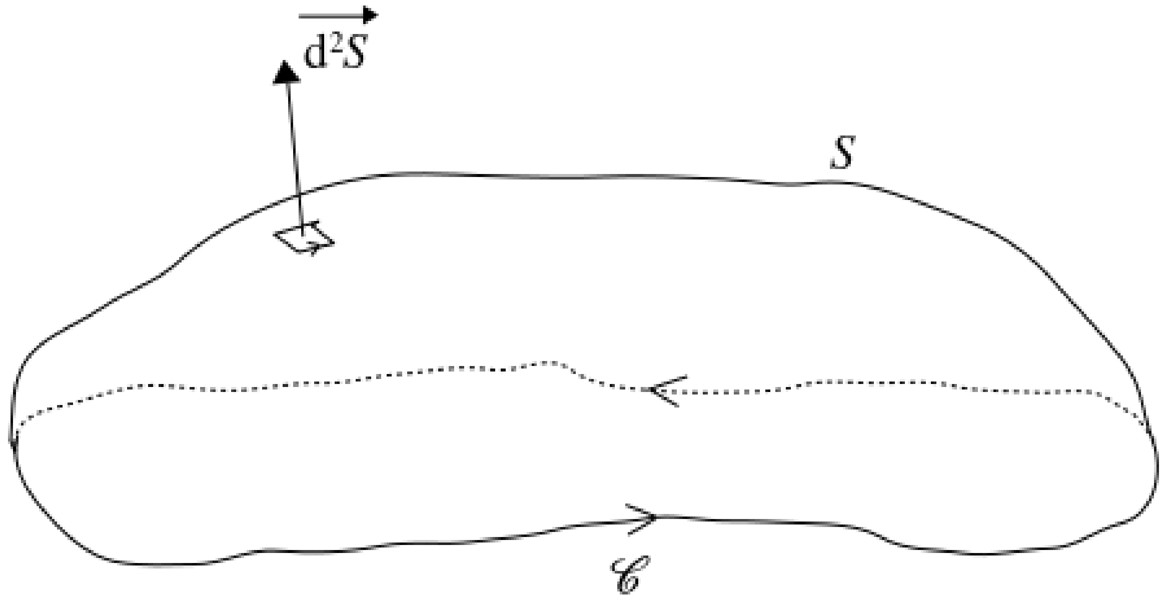

FIGURE 12 – Une surface ouverte orientée S est orientée conjointement avec son contour $\mathscr{C}$

8.4.1 Version intégrale de la démonstration.

On considère un contour $\mathscr{C}$, orienté. On choisit deux surfaces ouvertes quelconques S_1 et S_2 qui s'appuient toutes deux sur ce contour $\mathscr{C}$, et qui sont orientées conjointement avec lui : voir les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{d}^2 S_1}$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}^2 S_2}$ sur la Figure 13 (en fait $\overrightarrow{\mathrm{d}^2 S_2}$ n'est pas représenté, il n'y a que son opposé).

La *réunion* des deux surfaces ouvertes S_1 et S_2, que l'on va noter S, est une surface *fermée* : $S = S_1 \cup S_2$.

Du fait qu'elle est fermée, elle est orientée vers son extérieur. Sur la Figure 13, on voit que $\overrightarrow{\mathrm{d}^2 S_1}$ coïncide avec $\overrightarrow{\mathrm{d}^2 S}$, mais que $\overrightarrow{\mathrm{d}^2 S_2}$ est opposé à $\overrightarrow{\mathrm{d}^2 S}$.

On a donc

$$\oiint_S \vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}^2 S} = \iint_{S_1} \vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}^2 S_1} - \iint_{S_2} \vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}^2 S_2}$$

Mais, la surface S étant fermée, et le champ $\vec{A}$ étant à flux conservatif, on a $\oiint_S \vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}^2 S} = 0$.

Et donc $\iint_{S_1} \vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}^2 S_1} = \iint_{S_2} \vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}^2 S_2}$: le flux de $\vec{A}$ ne dépend pas de la surface ouverte S qui s'appuie sur le contour $\mathscr{C}$, mais seulement de ce contour $\mathscr{C}$.

8.4.2 Version locale de la démonstration.

La démonstration locale est très simple ; elle s'appuie sur le fait que, puisque $\vec{A}$ est à flux conservatif, il peut s'écrire sous la forme $\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{C}$, et sur la formule de Stokes.

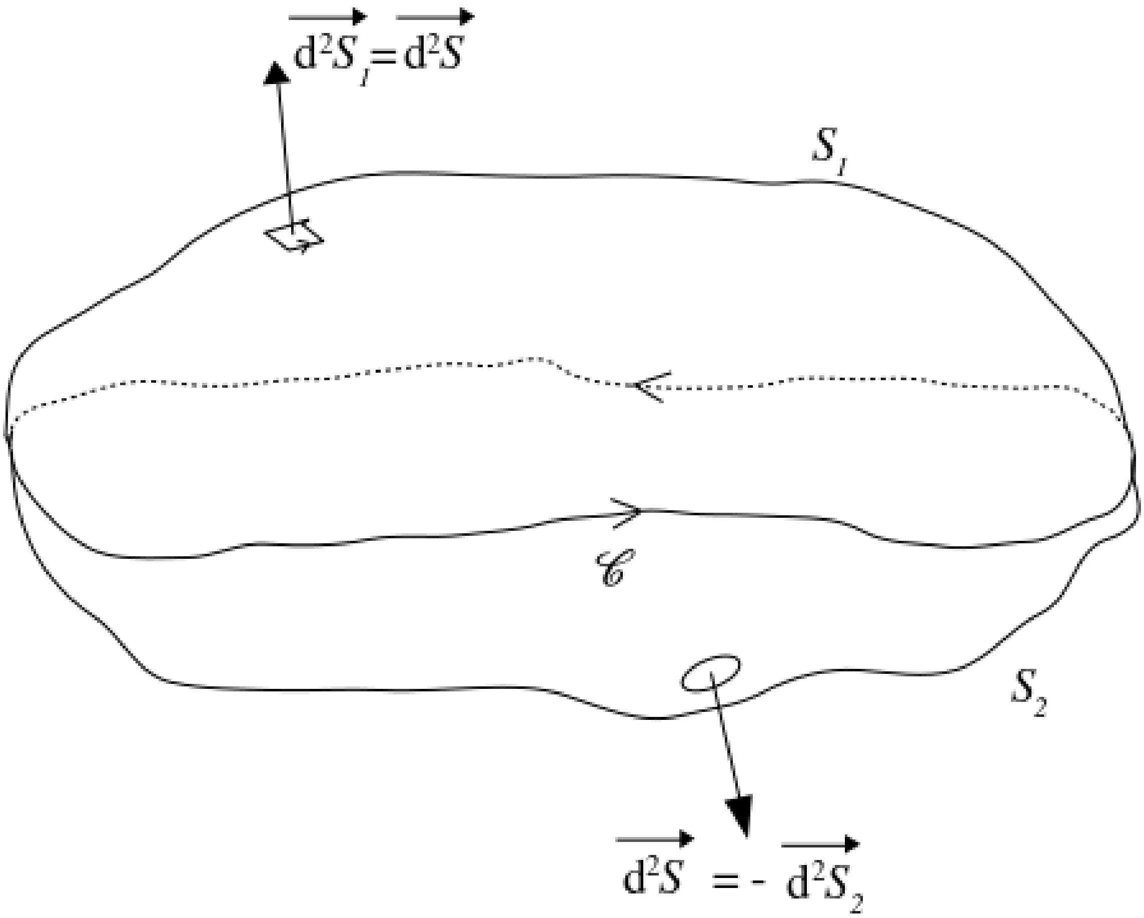

FIGURE 13 – Un contour $\mathscr{C}$ orienté est donné. Sur ce contour s'appuient deux surfaces ouvertes S_1 et S_2, orientées conjointement avec ce contour.

$$\iint_S \vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}^2 S} = \iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{C} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}^2 S} = \oint_{\mathscr{C}} \vec{C} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$$

Le flux de $\vec{A}$ à travers la surface ouverte S ne dépend bien que de son contour $\mathscr{C}$.