L'opérateur vectoriel gradient.

P. Colin

12 septembre 2023

Résumé

L'opérateur vectoriel gradient figure au programme de physique de la classe de PCSI (et malheureusement pas au programme de maths). Ce document essaie de présenter tout ce qui est à savoir à son sujet, en insistant sur le fait que cet opérateur est défini de manière *intrinsèque*, indépendamment de tout système de coordonnées.

Nous essaierons ensuite de vous permettre de vous en faire une représentation mentale intuitive.

Nous (re)verrons tous les domaines du programme de PCSI où il intervient, en particulier la statique des fluides et la notion de force conservative (et d'énergie potentielle).

Enfin nous terminerons en élargissant le propos à l'opérateur $\vec{b}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}$, qui n'est lui qu'au programme de la seconde année PC.

1 L'opérateur vectoriel gradient.

1.1 Définition.

L'opérateur gradient vous a peut-être été présenté à partir de son expression en coordonnées cartésiennes ; c'est de loin la manière la plus simple de l'introduire. Toutefois sa définition ne fait appel à aucun système de coordonnées particulier : il agit sur un champ scalaire de manière intrinsèque.

— Il s'applique à un champ scalaire $U(\vec{r})$.
— Et cela donne un champ vectoriel noté $\overrightarrow{\text{grad}}\,U$ ou $\vec{\nabla}U$ (bien noter qu'il n'y a pas de point entre $\vec{\nabla}$ et U).

Définition 1 *Gradient d'un champ scalaire $U(\vec{r})$.*

Pour tout *déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}r}$, on a*

$$\mathrm{d}U = \overrightarrow{\text{grad}}\,U \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}r}$$

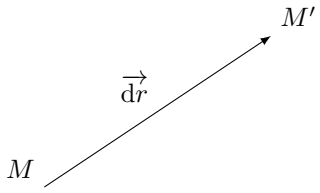

FIGURE 1 – Ce que l'on note $\mathrm{d}U$, c'est $U(M') - U(M)$, c'est-à-dire la variation du champ scalaire U lorsque l'on se déplace de M à M'. Comme toujours en physique, la notation "d" signifie que l'égalité entre $\mathrm{d}U$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\,U \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}r}$ n'est vérifiée que dans la limite où la distance entre les points M et M' tend vers 0.

1.2 Expression en coordonnées cartésiennes.

Notons $M(x, y, z)$ et $M'(x + \varepsilon_x, y + \varepsilon_y, z + \varepsilon_z)$.

Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{d}U &= U(M') - U(M)\\ &= U(x+\varepsilon_x, y+\varepsilon_y, z+\varepsilon_z) - U(x,y,z)\\ &= \varepsilon_x \frac{\partial U}{\partial x} + \varepsilon_y \frac{\partial U}{\partial y} + \varepsilon_z \frac{\partial U}{\partial z} + o(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_y)\end{aligned}$$

(Ce n'est en réalité qu'un développement limité à l'ordre 1 d'une fonction de trois variables).

Dans la limite où ε_x, ε_y et ε_z tendent tous trois vers zéro, on peut les remplacer par les notations $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$ et écrire l'égalité entre les limites obtenues :

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}x \frac{\partial U}{\partial x} + \mathrm{d}y \frac{\partial U}{\partial y} + \mathrm{d}z \frac{\partial U}{\partial z}$$

On reconnaît dans $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ les trois composantes du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}r}$. Comme l'égalité ci-dessus doit être vérifiée pour *tout* vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}r}$, par *définition* du gradient, on en déduit par identification les composantes de $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U$ en coordonnées cartésiennes : $\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}, \dfrac{\partial U}{\partial y}, \dfrac{\partial U}{\partial z}\right)$.

1.3 Et ça marche aussi dans les autres systèmes de coordonnées ?

La réponse est bien évidemment oui. Nous allons ici, à titre d'exemple, retrouver les composantes de $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U$ en coordonnées cylindriques ; à charge pour vous, si vous vous en sentez, de les retrouver également en coordonnées sphériques.

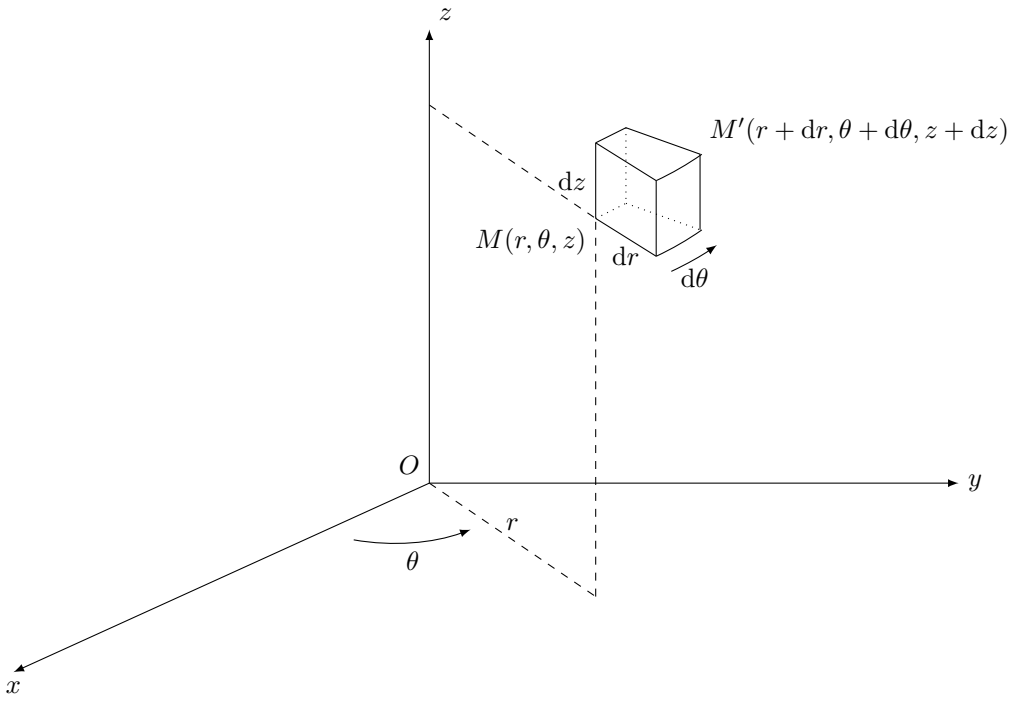

FIGURE 2 – On représente deux points très proches M et M', en coordonnées cylindriques.

On rappelle les composantes du vecteur élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}r}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{d}r} \left| \begin{array}{l} \mathrm{d}r \\ r\,\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}z \end{array} \right.$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U &= U(r+\mathrm{d}r, \theta+\mathrm{d}\theta, z+\mathrm{d}z) - U(r,\theta,z) \\ &= \mathrm{d}r\frac{\partial U}{\partial r} + \mathrm{d}\theta\frac{\partial U}{\partial \theta} + \mathrm{d}z\frac{\partial U}{\partial z} \\ &= \mathrm{d}r\frac{\partial U}{\partial r} + r\mathrm{d}\theta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\right] + \mathrm{d}z\frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned}$$

D'où l'on déduit les composantes de $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U$ en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U \left| \begin{array}{c} \dfrac{\partial U}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial U}{\partial z} \end{array} \right.$$

1.4 Linéarité.

L'opérateur gradient est un opérateur linéaire (la démonstration est très simple).

2 Représentation intuitive.

On va essayer dans cette section de vous faire « voir » le champ vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U$.

Si cela peut vous aider, on va déjà se placer dans le cas d'un champ scalaire défini dans un espace à deux dimensions – ceci devrait aider ceux qui ont l'habitude en randonnée de lire et d'interpréter des cartes détaillées où le relief est figuré par des courbes de niveau. Puis nous reviendrons au cas plus général d'un espace à trois dimensions.

2.1 Cas particulier d'un espace à deux dimensions et d'un champ scalaire $U(x, y)$.

L'avantage de ce cas particulier, c'est qu'on peut assez facilement faire des représentations graphiques du champ scalaire $U(M)$: en effet, on peut tracer une surface d'équation cartésienne $z = U(x, y)$ (c'est l'exemple des « cartes en relief » (voir la Figure 3). Les régions où U est « grande » sont les sommets des montagnes dans cette représentation, celles où U est « petit » sont les fonds des vallées.

FIGURE 3 – Carte en relief de la région d'Annecy.

Il faut bien comprendre toutefois que l'on n'est que dans un espace à deux dimensions, la troisième dimension n'est ici utilisée que comme artifice de représentation.

Une autre représentation possible, celle qui est utilisée sur les cartes en papier ou sur écran, consiste à tracer les « courbes de niveau », c'est-à-dire les lignes d'équation $U(x, y) = \text{cte}$ (voir Figure 4).

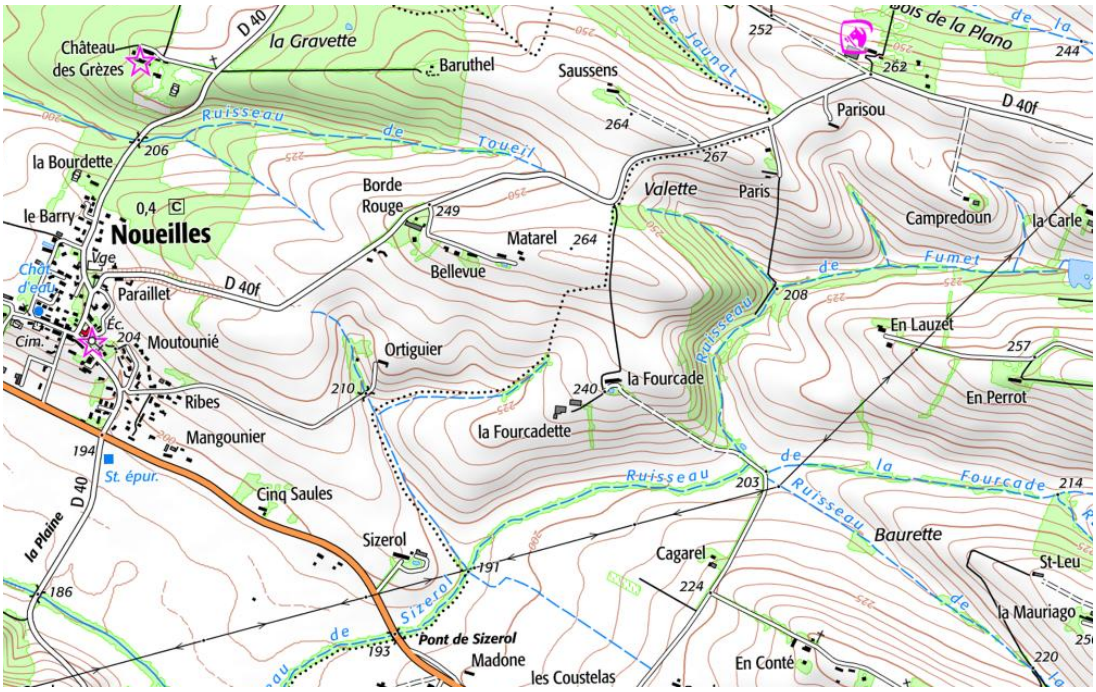

FIGURE 4 – Lignes de niveau sur une carte IGN à proximité de Noueilles (Haute-Garonne). Les lignes de niveau sont ici tracées tous les 5 m. La grandeur U, c'est ici en fait l'altitude du sol. Dans certains endroits les lignes de niveau sont très espacées : la pente du terrain est très faible, comme par exemple où il est indiqué « La Plaine » (comme par hasard !). Dans d'autres endroits, elles sont très rapprochées et la pente est forte, comme sur la rive droite du ruisseau de Fumet, à l'est de la Fourcade. On repère plusieurs sommets sur cette carte (c'est-à-dire des maxima locaux de U) : par exemple un, à un peu plus de 265 m d'altitude, légèrement à l'est de Matarel, un autre à 267 m d'altitude environ, au départ du chemin pour Saussens. On ne voit pas de minimum local (et c'est assez normal, ce serait le fond d'une « cuvette », ce qui n'est pas très courant). On repère par contre un col, entre les deux maxima mentionnés précédemment, là où la route D40f fait à peu près un virage à angle droit et d'où part le chemin pour la Fourcade.

Qu'est-ce que $\overrightarrow{\text{grad}}\,U$ dans ces conditions, dans cet espace à deux dimensions ? Eh bien c'est un vecteur à deux composantes, que l'on peut représenter, en tout point, par une flèche sur la Figure 4.

Ce vecteur est dirigé des petites valeurs de U vers les fortes valeurs de U, il est perpendiculaire aux courbes de niveau (sur le terrain, on dirait qu'il est dirigé suivant la « ligne de plus grande pente », vers le haut). Et sa norme sera d'autant plus grande que les lignes de niveau sont serrées à l'endroit où on le trace voir la Figure 5. Essayez de bien faire le lien entre toutes les propriétés qui viennent d'être énoncées et la Définition 1.

2.2 Et maintenant à trois dimensions.

La situation n'est pas plus compliquée à trois dimensions, pour un champ scalaire $U(x, y, z)$, mais ce qui est plus compliqué, c'est la représentation graphique de cette fonction, pour laquelle on est assez démuni (voir toutefois un essai modeste sur la Figure 6). Il faut donc passer à un niveau d'imagination et d'abstraction supérieur.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,U$ est un vecteur à trois composantes. L'équation $U(x, y, z) = \text{cte}$ définit maintenant des *surfaces* de niveau.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,U$ est perpendiculaire aux surfaces de niveau, en tout point, et est dirigé des « faibles » valeurs de U vers les « fortes » valeurs de U : voir la Figure 6.

3 Exemples d'utilisation du gradient.

3.1 Équation fondamentale de la statique des fluides.

Dans un fluide au repos dans un référentiel galiléen, on rappelle que l'équation locale fondamentale de la statique des fluides s'écrit :

FIGURE 5 – Même carte que celle de la Figure 4, sur laquelle on a rajouté, en six points A, B, C, D, E et F le vecteur gradient (avec une échelle arbitraire, mais bien évidemment la même pour les six vecteurs). Un $\overrightarrow{\text{grad}}\,U$ dont la norme serait égale, par exemple, à 0,050 (ici sans unité) signifierait que, en se déplaçant d'une distance horizontale de 1 m en suivant la ligne de plus grande pente, vers le haut, on augmenterait l'altitude de 5 cm.

Formule 1 *Équation locale de la statique des fluides.*

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,P = \rho\vec{g}$$

où $P(x,y,z)$ est la pression, $\rho(x,y,z)$ la masse volumique du fluide, et $\vec{g}$ le champ de pesanteur.

3.2 Forces conservatives. Énergie potentielle associée.

On rappelle qu'une force conservative est une force dont le travail d'un point A à un point B ne dépend pas du chemin suivi pour aller de A à B. Or le travail de cette force, c'est justement sa circulation de A à B : $W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}$, l'intégrale étant prise le long du chemin suivi.

Formule 2 *Force conservative.*

Une force $\vec{F}$ est conservative si et seulement si elle peut s'écrire sous la forme

$$\vec{F}_{cons} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,E_p$$

Alors on aura pour un déplacement élémentaire :

Formule 3 *Travail élémentaire d'une force conservative.*

$$\delta W(\vec{F}_{cons}) = -\mathrm{d}E_p$$

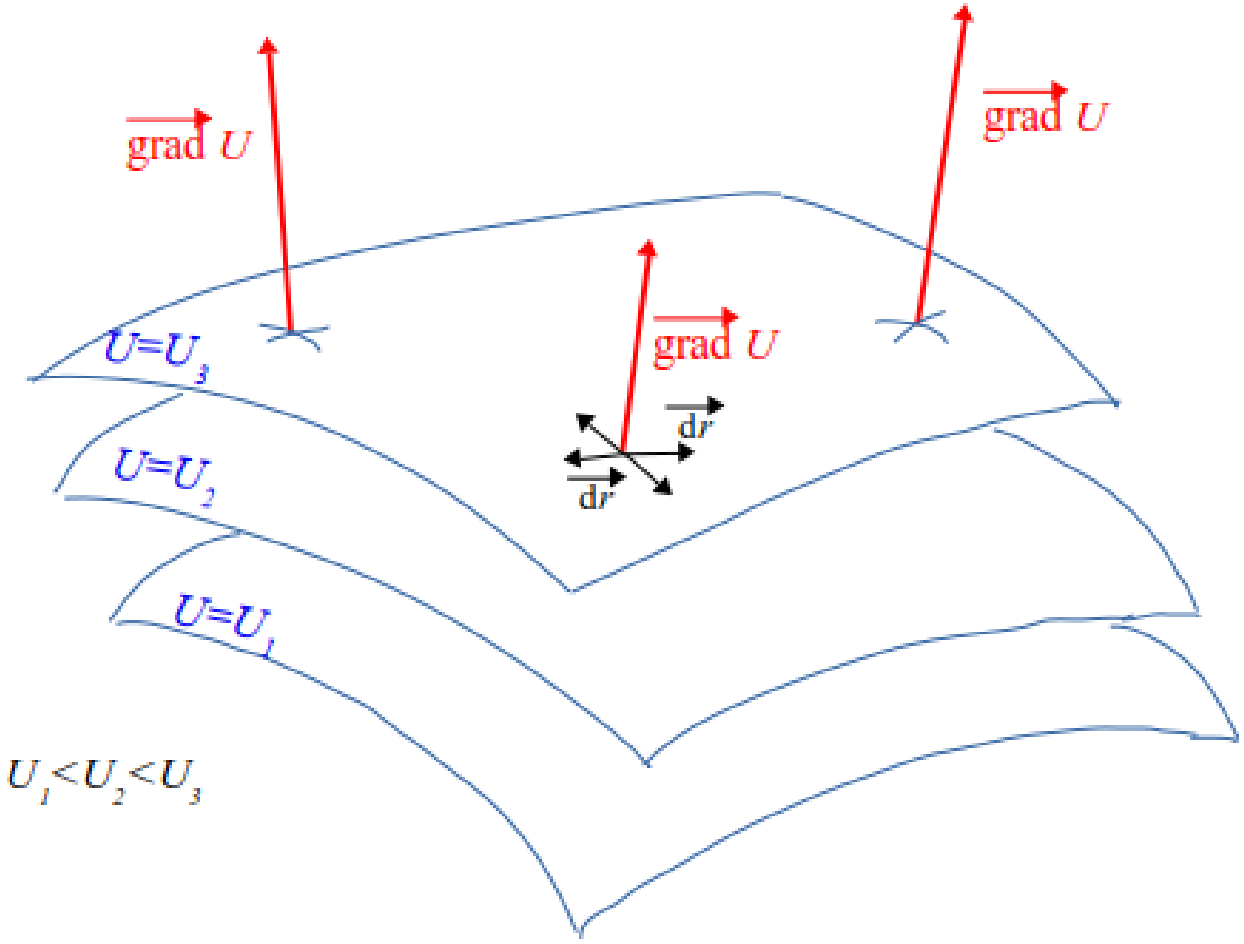

FIGURE 6 – Trois surfaces iso-U sont représentées. Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,U$ est représenté en trois points de la surface supérieure. Ce vecteur est perpendiculaire aux surfaces iso-U, dirigé des faibles valeurs de U vers les fortes valeurs de U. On peut le voir en remarquant que, si M et M' sont deux points appartenant à une *même* surface iso-U, alors $\mathrm{d}U = U(M') - U(M) = 0$, et donc $\overrightarrow{\text{grad}}\,U \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}r} = 0$ pour tous les $\overrightarrow{\mathrm{d}r}$ tracés sur la surface iso-U.

Et pour un déplacement non infinitésimal :
$W_{A\to B}(\vec{F}_{cons}) = \int_A^B \vec{F}_{cons} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}\,E_p \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_A^B (-\mathrm{d}E_p) = E_p(A) - E_p(B)$
Ce travail ne dépend effectivement que du point de départ et du point d'arrivée, et pas du chemin suivi.

On peut bien évidemment citer comme exemple le poids d'un système de masse m, qui est conservatif et pour lequel $\delta W = -mg\,\mathrm{d}z$ et $E_p = +mgz$, *SI l'axe des z est orienté vers le haut* (sinon il convient de changer les deux signes).

4 L'opérateur $\left(\vec{b} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)$ (aussi noté $\left(\vec{b} \cdot \vec{\nabla}\right)$).

4.1 Expression en coordonnées cartésiennes

.
Il n'y a qu'en cooordonnées cartésiennes que l'on peut exprimer aisément cet opérateur.
Et on l'exprime alors en utilisant le moyen mnémotechnique que représente le « vecteur »nabla $\vec{\nabla}$:

Formule 4 *Expression en coordonnées cartésiennes de l'opérateur* $\left(\vec{b}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)$.

$$\left(\vec{b}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right) = b_x\frac{\partial}{\partial x} + b_y\frac{\partial}{\partial y} + b_z\frac{\partial}{\partial z}$$

Cet opérateur peut s'appliquer aussi bien à un champ vectoriel $\vec{A}(\vec{r})$ (et il donne alors le champ vectoriel $\left(\vec{b}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{A}$), qu'à un champ scalaire $U(\vec{r})$ (et il donne alors le champ scalaire $\left(\vec{b}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)U$).

Toutefois, étant donné que, pour un champ scalaire $U(\vec{r})$, on a $\left(\vec{b}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)U = \vec{b}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,U$, l'intérêt de cet opérateur est dans ce cas fort limité ; il n'apporte rien de plus que l'opérateur gradient.

On se limitera donc par la suite au cas où cet opérateur est appliqué à un champ vectoriel $\vec{A}(\vec{r})$.

4.2 Exemples.

On va se limiter à deux exemples d'utilisation de cet opérateur.

4.2.1 Expression de l'accélération eulérienne en mécanique des fluides.

Comme on l'a vu dans le cours de cinématique des fluides, l'accélération, en représentation eulérienne, s'écrit :

$$\vec{a}(\vec{r},t) = \frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}$$

On voit que l'opérateur est utilisé dans le second terme, à savoir le terme d'accélération convective. C'est un cas très particulier toutefois, dans la mesure où les champs $\vec{b}$ et $\vec{A}$ sont identiques, tous deux égaux à $\vec{v}$.

4.2.2 Cas particulier de l'opérateur $\left(\overrightarrow{\mathrm{d}r}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)$.

Cet opérateur est l'analogue exact, mais pour les champs vectoriels $\vec{A}(\vec{r})$, de l'opérateur gradient pour les champs scalaires (voir la définition 1).

Formule 5 $\left(\overrightarrow{\mathrm{d}r}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)$ *appliqué à un champ vectoriel* $\vec{A}(\vec{r})$.

$$\overrightarrow{\mathrm{d}A} = \left(\overrightarrow{\mathrm{d}r}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{A}$$

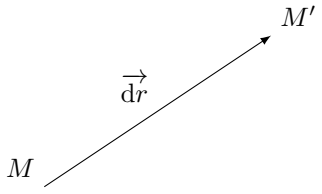

FIGURE 7 – Ce que l'on note $\overrightarrow{\mathrm{d}A}$, c'est $\vec{A}(M') - \vec{A}(M)$, c'est-à-dire la variation du champ vectoriel $\vec{A}$ lorsque l'on se déplace de M à M'. Comme toujours en physique, la notation "d" signifie que l'égalité entre $\overrightarrow{\mathrm{d}A}$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{d}r}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{A}$ n'est vérifiée que dans la limite où la distance entre les points M et M' tend vers 0.

4.2.3 Résultante des actions mécaniques qui s'exercent sur un dipôle électrostatique plongé dans un champ $\vec{E}_{ext}$ d'origine extérieure.

L'expression de cette résultante sera vue en cours d'année :

$$\vec{R} = \left(\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right) \vec{E}_{ext}$$