Les ellipses.

P. Colin

8 décembre 2023

Résumé

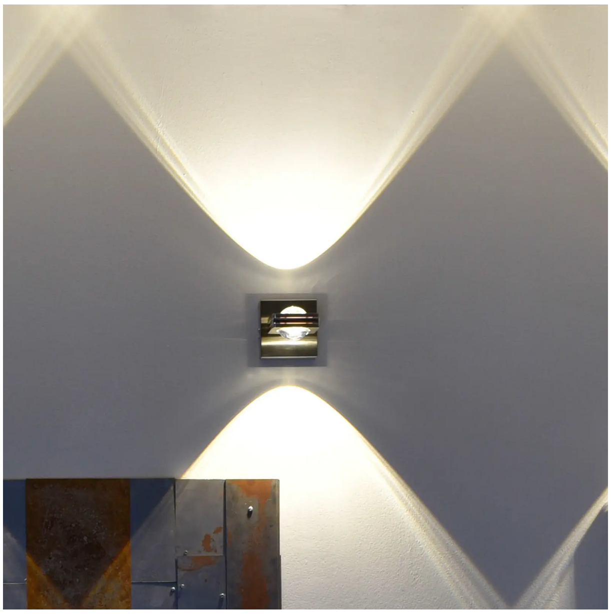
Cela fait un moment que les coniques en général, les ellipses en particulier, ont disparu de vos cours de maths. Elles n'ont pourtant pas disparu du monde dans lequel nous vivons, dans lequel elles sont omniprésentes (de la trajectoire des planètes à la polarisation de la lumière, pour ne citer que deux exemples), ni de votre programme de physique... Il vous suffira d'avoir à leur sujet quelques connaissances rudimentaires, que j'essaie de présenter dans ce document. Il ne s'agit donc pas du tout d'un "cours" exhaustif sur les coniques, ni même sur les ellipses... j'insiste simplement sur les définitions, propriétés, qui vont pouvoir vous être utiles.

1 Les coniques.

1.1 Quelques exemples.

Les coniques sont omniprésentes dans le monde qui nous entoure, à condition d'avoir l'œil exercé pour les reconnaître lorqu'on les « croise ». Nous donnons ci-dessous quelques exemples, mais nous laissons le soin au lecteur de démontrer que les courbes évoquées sont bien des coniques.

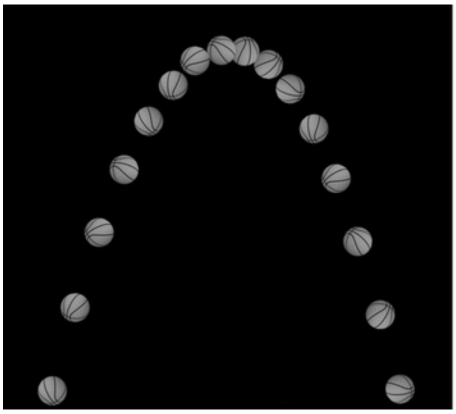
1.1.1 Hyperbole.



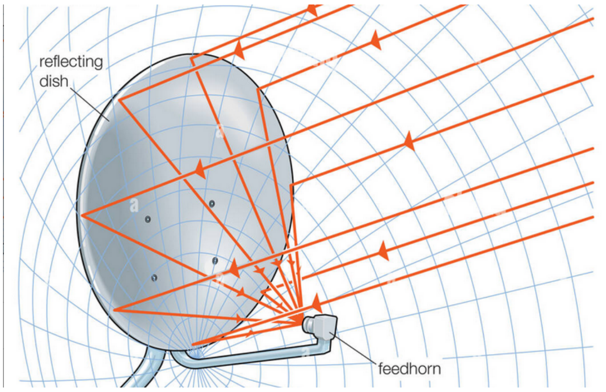
On peut observer une hyperbole (ou bien une ou deux branches d'hyperbole) sur un mur plan, éclairé par une source lumineuse quasi-ponctuelle, dont le faisceau lumineux est limité par une ouverture circulaire, comme sur la figure ci-contre.
En toute rigueur on n'observera une hyperbole dans ces conditions que si la source lumineuse est quasi-ponctuelle (ce qui est de plus en plus souvent le cas avec comme sources des diodes électroluminescentes).

Les tours aéroréfrigérantes des centrales nucléaires (à gauche, celles de la centrale de Golfech) ont en général la forme d'un hyperboloïde de révolution (surface dont la coupe par un plan ici vertical donne une hyperbole avec ses deux branches).

1.1.2 Parabole.

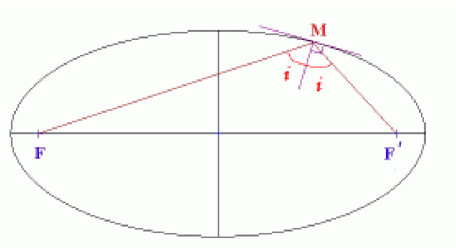


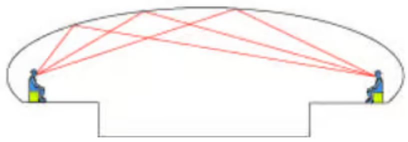
Comme vous le savez, un point matériel en mouvement dans un champ de force uniforme décrit une parabole.
C'est par exemple le cas pour un point matériel dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ uniforme, si on peut négliger les frottements de l'air : voir ci-contre la chronophotographie d'un ballon de basket (si le corps en question a une taille qui fait qu'il ne peut être assimilé à un poit matériel, c'est son centre de masse G qui décrit une parabole).
Ce serait aussi le cas pour une particule chargée dans un champ $\vec{E}$ uniforme, par exemple entre les armatures d'un condensateur plan.



Il est à noter que les « paraboles » (antennes paraboliques) situées sur les toits pour la réception des émissions des satellites sont improprement nommées : en effet il s'agit de surfaces réfléchissantes, et une parabole est une courbe, pas une surface. Il s'agit en réalité de paraboloïdes de révolution, dont on exploite la propriété de stigmatisme rigoureux entre un point à l'infini sur l'axe de révolution (à savoir le satellite visé), et le foyer du paraboloïde (où vont converger tous les « rayons » issus du satellite, et où l'on place en pratique le récepeteur.

1.1.3 Ellipse.





— La première loi de Kepler nous indique que les planètes décrivent, autour du Soleil, des orbites elliptiques, dont le Soleil occupe l'un des foyers.

— On a vu en cours qu'une OPPM électromagnétique dans le vide est dans le cas le plus général polarisée elliptiquement.

— Une ellipse a la particularité géométrique d'être parfaitement stigmatique pour ses deux foyers : tout rayon (lumineux, sonore) issu d'un foyer et qui se réfléchit en un point quelconque de l'ellipse (conformément à la loi de Snell-Descartes) passe ensuite exactement par le second foyer. Vous pourrez vérifier cela dans de nombreuses stations du métro de Paris, dont la voûte est un cylindre elliptique (c'est-à-dire que la coupe par un plan vertical perpendiculaire à la direction des voies est une ellipse) ; il est possible de se parler, à voie basse, d'un quai à l'autre, à condition évidemment de réussir à se placer approximativement à chacun des deux foyers.

1.2 Définition géométrique.

Les coniques sont les courbes planes obtenues comme intersection d'un cône de révolution et d'un plan.

Un cône de révolution a un axe (de révolution) ; sur la figure 1, cet axe est vertical. On prend ensuite une droite qui coupe cet axe avec un certain angle α (pris dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$), en un certain point (ce point sera appelé le sommet du cône). Et on obtient la surface du cône en faisant tourner cette droite autour de l'axe, en maintenant fixe le point d'intersection : le cône de révolution est la surface ainsi balayée [1].

On obtient alors les courbes appelées coniques comme intersection d'un plan avec le cône précédemment décrit :

— si l'angle entre le plan et l'axe de révolution (pris dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$) est plus grand que α, alors on obtient une *ellipse*

— si cet angle est plus petit que α, on obtient une *hyperbole*, qui est toujours formée de deux *branches*

— enfin, si cet angle est égal à α, on obtient une *parabole*

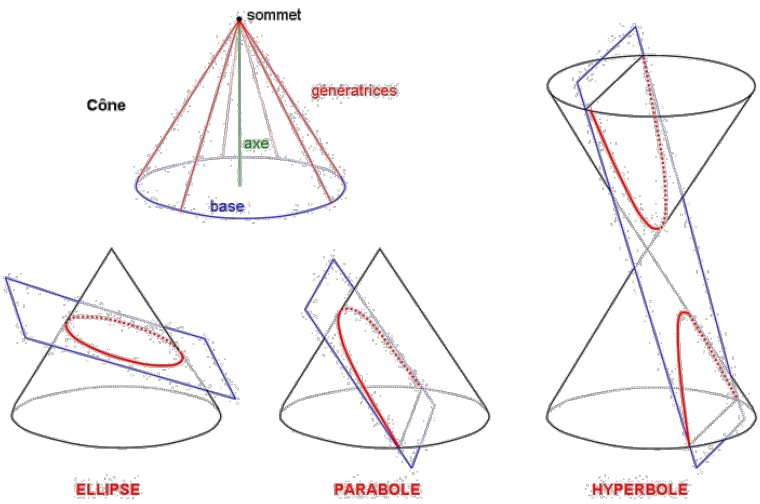


FIGURE 1 – On présente ici les trois types de conique non dégénérée : une ellipse, une parabole, et une hyperbole (cette dernière étant formée de deux branches). Ces courbes sont obtenues comme intersection d'un plan avec la surface d'un cône. Image tirée de `https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/detentes/les-coniques`, que l'on pourra consulter avec profit (animations, vidéos).

1. On notera alors qu'une telle surface a une équation cartésienne de la forme $x^2 + y^2 = (\tan^2 \alpha) z^2$, si l'axe Oz est pris comme axe de révolution du cylindre et que l'origine O des coordonnées est au sommet du cône.

Bien évidemment, il existe des coniques dites *dégénérées*, lorsque le plan passe par le sommet du cône : on obtient alors respectivement soit un seul point, soit deux droites sécantes, soit une seule droite. On ne considérera pas ce cas dans la suite de ce document.

1.3 Équations en coordonnées cartésiennes.

On se place maintenant dans le plan de la conique considérée, et on choisit un repère orthonomé Oxy dans ce plan (le plan Oxy n'est donc plus le même que celui de la figure 1).

On admettra que toutes les courbes dont l'équation cartésienne est de la forme $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$ sont des coniques (voir trois exemples sur la figure 2). (Bien évidemment il y a là aussi des cas “dégénérés” : si, par exemple, a, b et c sont nuls, on a bien sûr à faire à une droite ; pour l'équation $x^2+3y^2+5=0$, par exemple, on n'a que l'ensemble vide !).

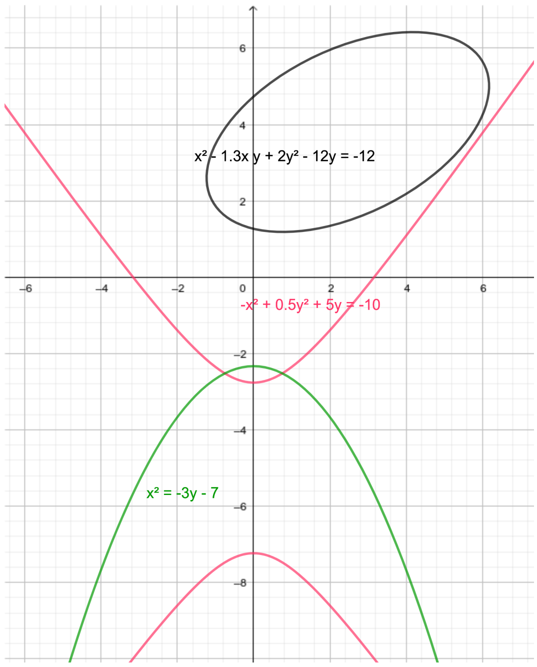


Figure 2 – On présente ici les trois types de conique non dégénérée : une ellipse, une parabole, et une hyperbole (cette dernière étant formée de deux branches), avec leurs équations cartésiennes dans le plan.

Par la suite nous allons nous concentrer uniquement sur les ellipses.

2 Les ellipses.

2.1 Nouvelle définition géométrique : très pratique pour tracer une ellipse sur la plage.

Se reporter à la figure 3.

Étant donnés deux points F_1 et F_2, l'ellipse est le lieu des points M tels que F_1M+F_2M soit égal à une constante L (constante évidemment supérieure à la distance F_1F_2). F_1 et F_2 sont les deux *foyers* de l'ellipse.

On comprend aisément que, plus les deux foyers sont éloignés (à constante L fixée), plus l'ellipse est “allongée” (le terme exact est que son excentricité augmente).

À l'inverse, lorsque les deux foyers sont confondus, l'ellipse se réduit à un cercle (de rayon $\frac{L}{2}$).

Il est à noter que cette définition purement géométrique d'une ellipse ne fait appel à aucun repère ou système de coordonnées.

2.2 Propriétés géométriques.

On se reportera à la figure 4.

L'ellipse est caractérisée par ses deux axes principaux : le grand axe, dont on note a la *demi*-longueur, et le petit axe, dont on note b la *demi*-longueur.

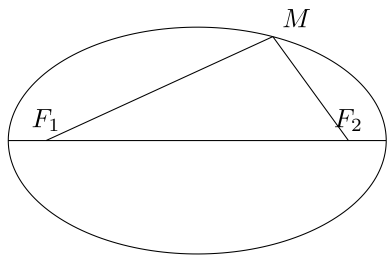


FIGURE 3 – On peut aisément tracer une ellipse à l'aide de deux points fixes (les foyers F_1 et F_2), d'une ficelle de longueur $L > F_1F_2$ fixée en ces deux points et d'un crayon. On pourra regarder par exemple la vidéo `https://www.maths-et-tiques.fr/telech/ellipse.mp4`.

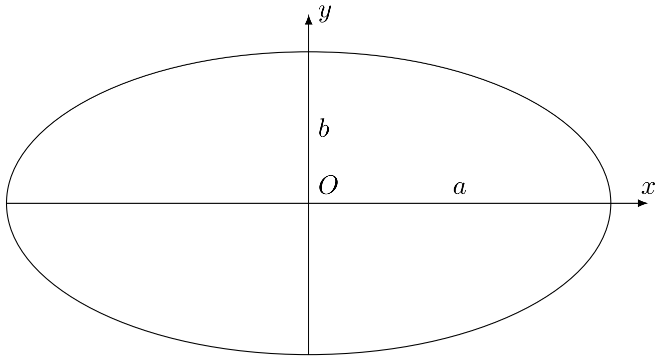


FIGURE 4 – Une ellipse de demi-grand-axe a et de demi-petit-axe b. Dans le repère orthonormé de la figure, elle a pour équation cartésienne $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Une de ses représentations paramétriques est $x(t) = a\cos(\omega t)$ et $y(t) = b\sin(\omega t)$.

On parle alors pour a de « demi-grand-axe » et pour b de « demi-petit-axe ».

On peut alors montrer que l'aire de l'ellipse est égale à πab.

Remarque : bien évidemment, si $a = b$, l'ellipse devient un cercle et on retrouve alors la formule classique de l'aire du disque πa^2.

Dans le repère de la figure 4, dont les axes coïncident avec les axes de l'ellipse, l'équation cartésienne de l'ellipse est $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. On retrouve là encore l'équation bien connue d'un cercle de centre O et de rayon a lorsque $a = b$.

2.3 Représentation paramétrique.

On pourra se reporter également à la figure 4.

Il y a bien évidemment une infinité de représentations paramétriques possibles pour une ellipse.

La plus fréquente, dans le cadre du programme, pour une ellipse de centre O, de demi grand-axe a dans la direction $x'x$ et de demi petit-axe b dans la direction $y'y$ est la suivante :

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(\omega t) \\ y(t) = b\sin(\omega t) \end{cases}$$

C'est la représentation paramétrique adaptée, par exemple, à l'étude de la polarisation des OPPM électromagnétiques ; t représente alors le temps. Mais il est à noter qu'une autre représentation paramétrique, tout aussi valable, est la suivante :

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(\omega t) \\ y(t) = -b\sin(\omega t) \end{cases}$$

Elle correspond simplement à une rotation "dans l'autre sens".

2.4 Et dans un repère cartésien orthonormé quelconque.

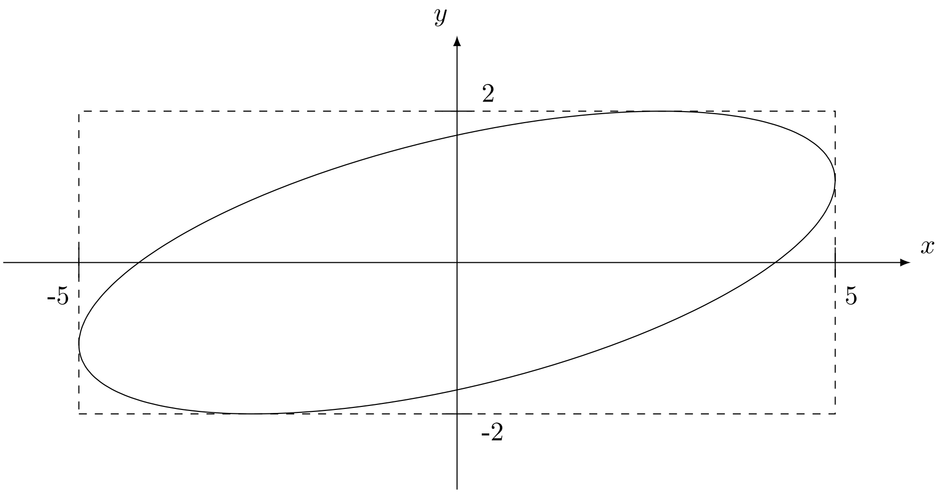
La figure 4 a été tracée en utilisant le “bon” repère cartésien, c'est-à-dire celui dont les axes coïncident avec les axes principaux de l'ellipse. Il faut noter qu'il sera toujours possible de se ramener à ce cas particulier très pratique en procédant, si nécessaire, à une rotation judicieuse de repère.

Il peut être utile toutefois de voir ce que deviennent l'équation cartésienne de l'ellipse et sa représentation paramétrique dans un repère cartésien orthonormé “quelconque”.

Pour l'équation cartésienne, on en a un exemple dans la figure 2 : on voit alors que, dans l'équation cartésienne de l'ellipse, de la forme $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$, le coefficient c n'est pas nul. Nous n'irons pas plus loin dans ce document dans l'étude systématique des équations cartésiennes des coniques ; le lecteur intéressé pourra se reporter à des ouvrages plus spécialisés.

Pour ce qui est de la représentation paramétrique, nous allons tracer ci-dessous, par exemple, la courbe de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = 5\cos(\omega t) \\ y(t) = 2\cos(\omega t - 1) \end{cases}$$



Le point important à remarquer est que $x(t)$ et $y(t)$ ne sont *pas* en quadrature : ceci est lié au fait que les axes $x'x$ et $y'y$ ne sont pas les axes principaux de l'ellipse. Là encore, le lecteur intéressé pourra se reporter à un ouvrage spécialisé.

Quoiqu'il en soit, Il est très facile d'“expérimenter” dans ce domaine : que ce soit avec votre calculatrice graphique, ou avec python, cela prend quelques minutes au maximum de tracer une courbe de représentation paramétrique donnée.