Déphasage entre deux fonctions sinusoïdales de même pulsation (révisions de PCSI).

P. Colin

En première année, la notion de déphasage a été vue principalement en électronique. Elle est cruciale, par exemple, dans le tracé des diagrammes de Bode d'un filtre linéaire.

Mais vous l'avez vue également dans le domaine de la propagation des ondes, et plus particulièrement du phénomène d'interférences.

Nous verrons en effet cette année que les interférences, ce n'est *qu'une* question de déphasage. Cette notion sera donc une des notions centrales de votre programme de deuxième année aussi.

Il est donc fondamental que vous en maîtrisiez le mieux possible les différents aspects.

Les exemples pris dans ce document concernent a priori davantage l'électronique, mais ils s'appliquent en fait à toute fonction sinusoïdale, quel que soit le domaine de la physique concerné.

1 Rappels du programme de PCSI.

Nous indiquons/rappelons ci-dessous les endroits du programme de PCSI où figure le mot *déphasage*, dans le domaine de l'électronique.

Nature et méthodes	**Capacités exigibles**
Décalage temporel / déphasage à l'aide d'un oscilloscope numérique.	Reconnaître une avance ou un retard de phase. Passer d'un décalage temporel à un déphasage et inversement. Repérer précisément le passage par un déphasage de 0 ou π en mode XY.

2 Définition du déphasage.

2.1 La définition proprement dite.

On considère donc deux fonctions sinusoïdales du temps, de *même* pulsation, que nous noterons ω. Nous noterons ces deux fonctions $e(t)$ et $s(t)$ (comme s'il s'agissait, par exemple, des tensions d'entrée et de sortie d'un filtre électronique).

Par un choix judicieux d'origine des temps, il est toujours possible de faire en sorte que $e(t)$ s'écrive sous la forme :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t) \qquad \text{avec} \qquad E_0 > 0$$

(il suffit de prendre l'origine des temps, $t = 0$, à un instant où $e(t)$ passe par son maximum).

Alors la fonction $s(t)$ s'écrira :

$$s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{avec} \qquad S_0 > 0$$

Par *définition* :

$$\boxed{\varphi \text{ est le déphasage de } s(t) \ \underline{\text{par rapport à}}\ e(t)}$$

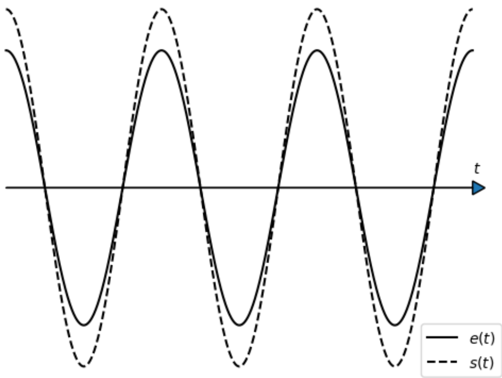
2.2 Compléments, remarques, conséquences directes.

— Le déphasage φ est une grandeur sans dimension, mais a une unité. Les deux unités les plus courantes sont le radian (en général pour tout ce qui est études théoriques), et le degré (en général pour tout ce qui est expérimental). Il importe en conséquence de savoir passer très rapidement et sans erreur d'une unité à l'autre.

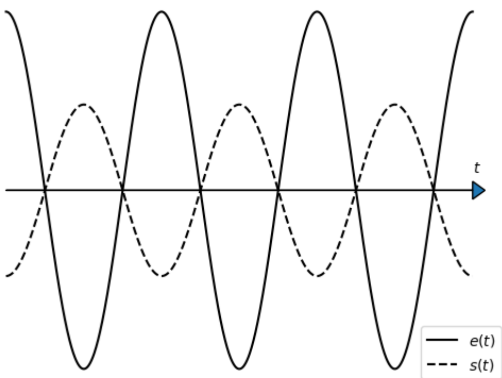
— Un déphasage φ est bien sûr défini module 2π radians (ou 360°) : $-\dfrac{2\pi}{3}$ radian ou $+\dfrac{4\pi}{3}$ radian, c'est le même déphasage. On peut convenir de retenir la valeur du déphasage qui est contenue dans l'intervalle $]-\pi,+\pi]$ (en radians), par exemple (ou un autre intervalle d'amplitude 2π). On gardera $]-\pi,+\pi]$ pour la suite de ce document.

— Si φ est le déphasage de $s(t)$ par rapport à $e(t)$, alors $-\varphi$ est le déphasage de $e(t)$ par rapport à $s(t)$. *À titre d'exercice : démontrez-le.*

— Lorsque $\varphi = 0$, on dit que les deux fonctions $e(t)$ et $s(t)$ sont *en phase* (on rappelle, et c'est ici important, que E_0 ET S_0 sont tous deux positifs).



— Lorsque $\varphi = \pi$, on dit que les deux fonctions $e(t)$ et $s(t)$ sont *en opposition de phase.*



— Si on n'a pas fait le « choix judicieux d'origine des temps » mentionné, alors $e(t)$ et $s(t)$ vont s'écrire plus généralement sous la forme :

$$\begin{cases} e(t) = E_0\cos(\omega t + \varphi_1) \\ s(t) = S_0\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

Dans ce cas, le déphasage de $s(t)$ par rapport à $e(t)$ est $\varphi_2 - \varphi_1$. *À titre d'exercice : démontrez-le.*

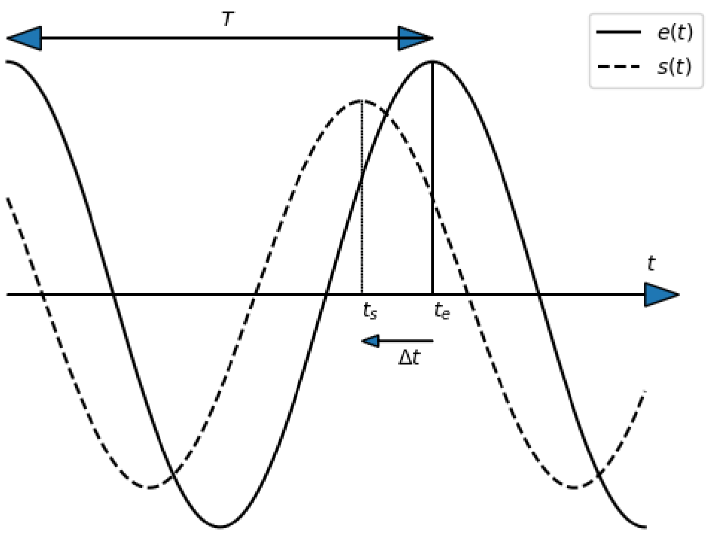
— Comme on a déjà pu le voir sur les figures ci-dessus, la notion de déphasage n'a strictement rien à voir avec les amplitudes des fonctions concernées.

2.3 Un exemple détaillé.

Nous allons, dans tout ce paragraphe, à titre d'exemple, considérer en détail le cas où $\varphi = +\dfrac{\pi}{3}$ radian (ou +60°) :

$$\begin{cases} e(t) = E_0 \cos(\omega t) \\ s(t) = S_0 \cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

On obtient le graphe suivant :



On voit sur cette figure que $s(t)$ est <u>en avance</u> (de phase) sur $e(t)$. Il faut savoir reconnaître cette situation immédiatement.

En effet, si on repère, par exemple, un passage de $e(t)$ par son maximum (par exemple le maximum de droite sur la figure ci-dessus), alors on voit que $s(t)$ passe par son maximum *avant* $s(t)$ (le temps t, l'abscisse, augmente bien sûr de gauche à droite) : $t_s < t_e$.

On peut bien évidemment être beaucoup plus précis et déterminer le *décalage temporel* $\Delta t = t_s - t_e$ en fonction du déphasage φ.

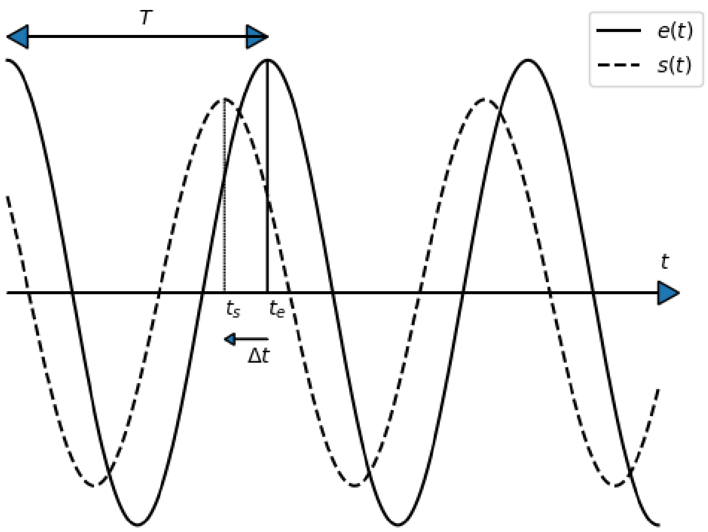
En effet $s(t) = S_0 \cos\left[\omega\left(t + \dfrac{\pi}{3\omega}\right)\right]$: en introduisant la période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, on a donc $s(t) = S_0 \cos\left[\omega\left(t + \dfrac{T}{6}\right)\right]$.

Ce qui signifie qu'il faut translater la courbe représentative de $e(t)$ *vers la gauche* d'un sixième de période pour obtenir la courbe représentative de $s(t)$ (question des amplitudes mise à part) : $\Delta t = t_s - t_e < 0$.

> On voit donc sur ce simple exemple que lorsque le déphasage de $s(t)$ par rapport à $e(t)$ est *positif* (plus précisément dans $]0, \pi[$), alors $s(t)$ est en *avance* sur $e(t)$.
> Et on pressent également que ce déphasage φ (pris dans $]-\pi, +\pi]$ radian), et le décalage temporel Δt, sont deux grandeurs qui sont *proportionnelles* : ici, un déphasage de $\dfrac{\pi}{3}$ (à savoir un sixième de 2π) correspond à un décalage temporel d'un sixième de période temporelle.
> Attention enfin comme on l'a vu sur l'exemple : φ et Δt sont de signes contraires.

<u>Remarque :</u> il est un point important à *bien* comprendre. Lorsque l'on dit que « $s(t)$ passe par son maximum avant $e(t)$ », il convient de bien réaliser que, implicitement, on considère *le* maximum de $s(t)$ qui est le plus proche, temporellement parlant, du maximum de $e(t)$ considéré.

En effet si on considère les deux mêmes fonctions sur un intervalle de temps plus large, on obtient la figure ci-dessous.



On considère toujours le maximum de $e(t)$ « central »(d'abscisse t_e). Il y a évidemment un maximum de $s(t)$ qui est situé *après* celui de $e(t)$. Mais il est plus éloigné, temporellement parlant, du maximum de $e(t)$ considéré que de celui d'abscisse t_s : c'est donc ce dernier qu'il faut considérer. $s(t)$ est, sans ambiguïté possible, *en avance* sur $e(t)$.

3 Généralités.

On peut généraliser à un déphasage quelconque tout ce que l'on a vu dans la section précédente sur le cas particulier $\varphi = +\dfrac{\pi}{3}$.

Revenons à

$$\begin{cases} e(t) = E_0 \cos(\omega t) \\ s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

On supposera que φ est dans $]-\pi, +\pi]$.

On a donc

$$\begin{aligned} s(t) &= S_0 \cos\left[\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)\right] \\ &= S_0 \cos\left[\omega\left(t + \frac{\varphi}{2\pi}T\right)\right] \end{aligned}$$

Et on retrouve ainsi tous les résultats du paragraphe précédent :

Lorsque φ est dans $]0, \pi[$, $s(t)$ est en avance sur $e(t)$.
Lorsque φ est dans $]-\pi, 0[$, $s(t)$ est en retard sur $e(t)$.
Le décalage temporel $\Delta t = t_s - t_e$ et le déphasage φ sont deux grandeurs qui sont proportionnelles (mais de signes contraires). Le coefficient de proportionnalité est facile à déterminer : à un déphasage de $+\pi$ par exemple correspond un décalage temporel de $-\dfrac{T}{2}$.
On a donc

$$\varphi = -2\pi \frac{\Delta t}{T} \qquad \text{si le déphasage est en radians}$$

ou encore

$$\varphi = -360 \frac{\Delta t}{T} \qquad \text{si le déphasage est en degrés}$$

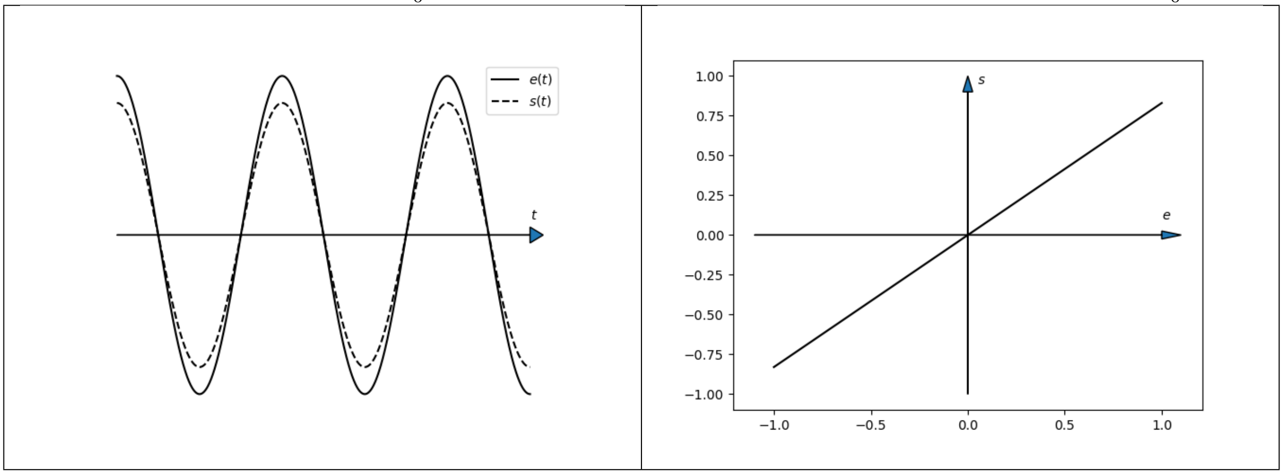
Ce sont ces relations que l'on peut utiliser, en TP, pour déterminer un déphasage lorsque l'oscilloscope numérique utilisé ne dispose pas de la mesure directe des déphasages (ce qui est de plus en plus rare).

4 Cas particuliers. Vocabulaire.

4.1 $\varphi = 0$.

$e(t)$ et $s(t)$ sont ***en phase***. On ne peut pas dire que $s(t)$ est ni en avance ni en retard sur $e(t)$.

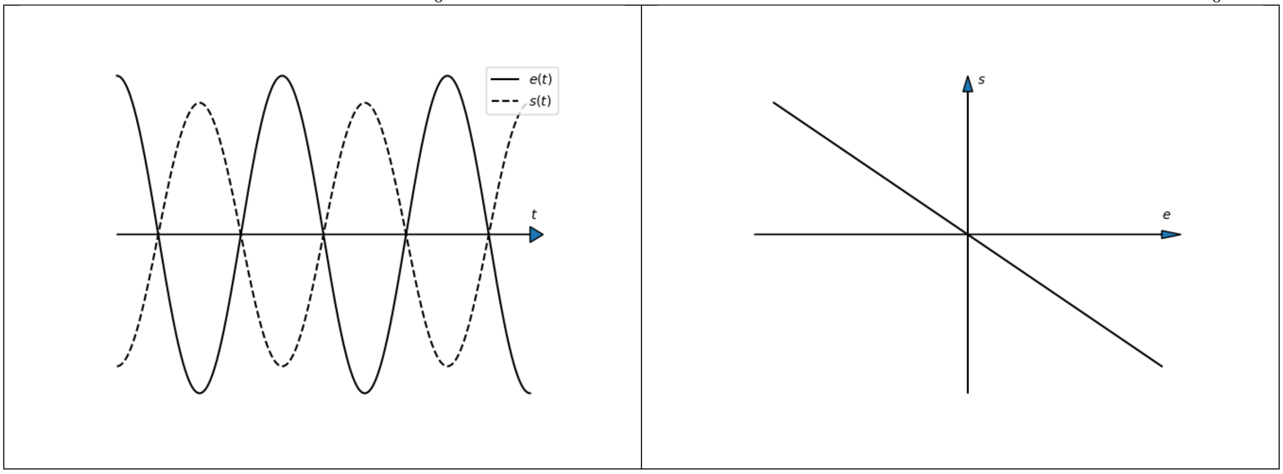
On remarquera que l'on a $s(t) = \dfrac{S_0}{E_0} e(t)$: en mode XY, on obtient un segment de droite de pente $\dfrac{S_0}{E_0} > 0$.



4.2 $\varphi = \pi$.

$e(t)$ et $s(t)$ sont ***en opposition de phase***. On ne peut pas dire que $s(t)$ est ni en avance ni en retard sur $e(t)$.

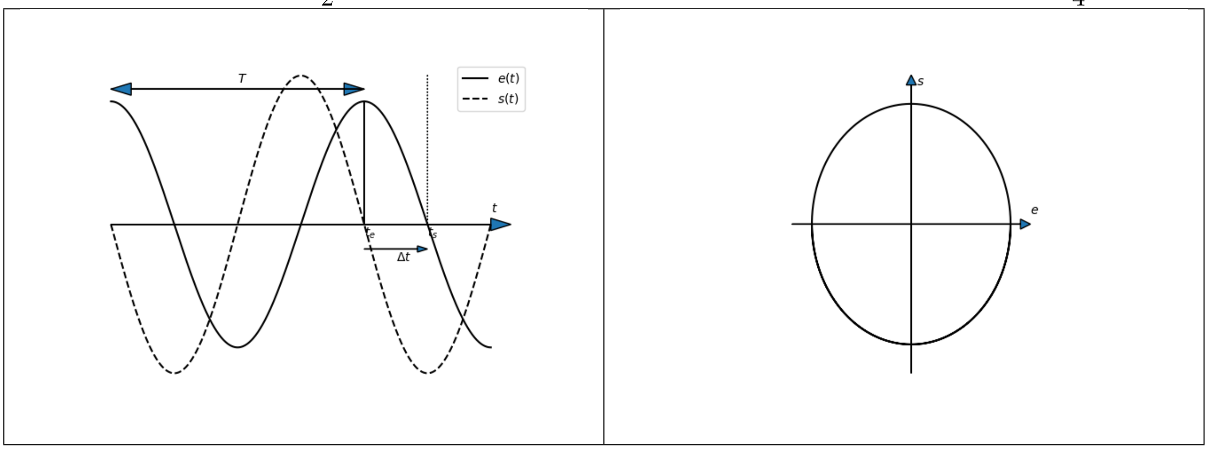
On remarquera que l'on a $s(t) = -\dfrac{S_0}{E_0} e(t)$: en mode XY, on obtient un segment de droite de pente $-\dfrac{S_0}{E_0} < 0$.



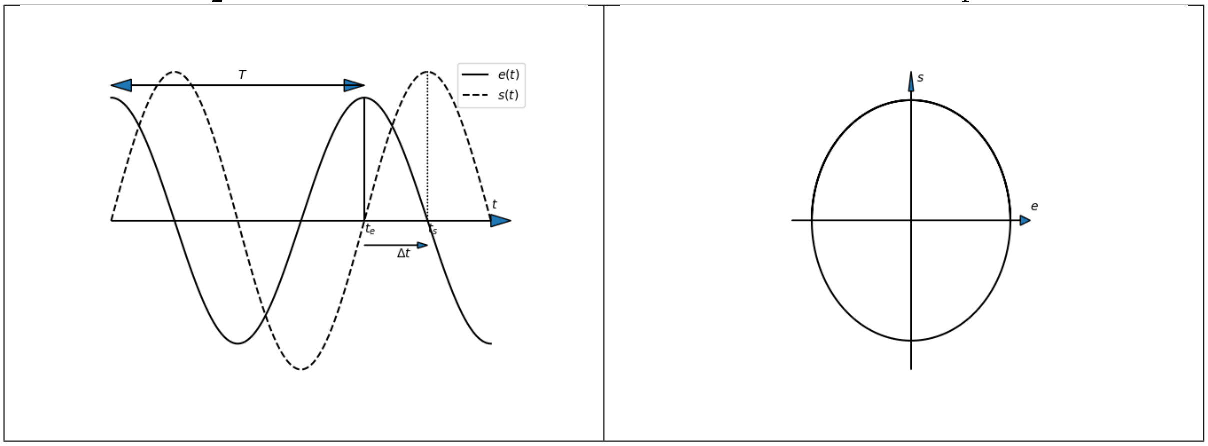
4.3 $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$.

Dans ces deux cas, on dit que $e(t)$ et $s(t)$ sont en ***quadrature***.

Plus précisément, si $\varphi = +\dfrac{\pi}{2}$, on dit que $s(t)$ est en **quadrature avance** sur $e(t)$: $\Delta t = -\dfrac{T}{4}$.



Et enfin si $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$, on dit que $s(t)$ est en **quadrature retard** sur $e(t)$: $\Delta t = +\dfrac{T}{4}$.



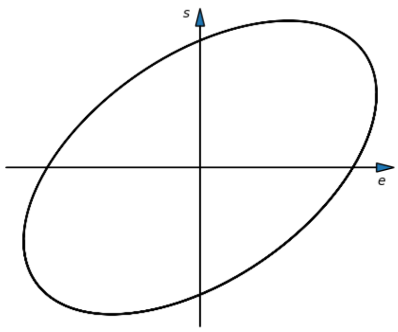
On remarquera que dans les deux cas de quadrature, une des deux fonctions atteint son extremum (maximum ou minimum) à l'instant précis où l'autre fonction s'annule. Cela permet, en pratique expérimentale, de repérer assez facilement les quadratures (mais cela suppose que les deux fonctions soient bien de moyenne nulle et n'aient pas un « offset »).

En mode XY, on obtient une **ellipse**, **dont les axes sont les axes de coordonnées**.

Il faut bien réaliser que ce qui distingue, en mode XY, la quadrature avance de la quadrature retard, c'est le *sens de parcours* de la dite ellipse (le plus souvent sur un écran d'oscilloscope, ce sens de parcours n'est pas perceptible, sauf à très très basse fréquence). *On pourra à titre d'exercice, déterminer le sens de parcours de chacune des deux ellipses ci-dessus.*

5 Mode XY pour le cas général.

Dans le cas général (où φ n'est pas un multiple de $\dfrac{\pi}{2}$), la courbe obtenue en mode XY est une **ellipse**, **dont les axes ne coïncident pas avec les axes de coordonnées**.



6 Exercices.

On se reportera utilement à toute la feuille d'exercices « Déphasages ».