Formules d'analyse vectorielle.

Dans tout ce document, on désignera par $U(\vec{r},t)$ et $V(\vec{r},t)$ des champs scalaires et par $\vec{A}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t)$ et $\vec{C}(\vec{r},t)$ des champs vectoriels.

1 Formules à connaître absolument par coeur.

$\forall\, U(\vec{r},t)$ champ scalaire, $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U) = \vec{0}}$
Et inversement, si on a un champ $\vec{B}(\vec{r},t)$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \vec{0}$, alors $\exists$ un champ $U(\vec{r},t)$ tel que $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U$.
Ce champ $U(\vec{r},t)$ n'est pas unique ($U(\vec{r},t) + cte$ convenant $\forall cte$).

$\forall \vec{A}(\vec{r},t)$ champ vectoriel, $\boxed{\mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) = 0}$
Et inversement, si on a un champ $\vec{B}(\vec{r},t)$ tel que $\mathrm{div}\,\vec{B} = \vec{0}$, alors $\exists$ un champ $\vec{A}(\vec{r},t)$ tel que $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$.
Ce champ n'est pas unique ($\vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U$ convenant $\forall\, U(\vec{r},t)$).

$\boxed{\vec{A} \wedge \left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) = \left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}}$ (formule du double produit vectoriel)

$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \vec{\Delta}\vec{A}}$

$\forall$ le volume V limité par la surface *fermée* S, $\boxed{\iiint_V \mathrm{div}\,\vec{A}\,\mathrm{d}\tau = \oint\!\!\oint_S \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}}$ (formule de Green-Ostrogradski).

$\forall$ la surface S délimitée par la courbe *fermée* $\mathcal{C}$, $\boxed{\iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}}$ (formule de Stokes).

2 Formules à connaître, ou à retrouver TRÈS rapidement.

Ces formules se redémontrent très facilement en utilisant la règle de dérivation d'un produit ($(fg)' = f'g + fg'$) : vérifiez que vous savez les démontrer.

$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\;(UV) = U\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V + V\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U}$

$\boxed{\mathrm{div}\,\left(U\vec{A}\right) = U\mathrm{div}\,\vec{A} + \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U}$

3 Autres formules, qui vous seraient fournies en cas de besoin.

Les deux premières se démontrent également en utilisant la règle de dérivation d'un produit.

$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\left(U\vec{A}\right) = U\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} + \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U\right)\wedge\vec{A}}$

$\boxed{\mathrm{div}\,\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right) = \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} - \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}}$

$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) = \vec{A}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} + \vec{B}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} + \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} + \left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}}$

$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right) = \left(\mathrm{div}\,\vec{B}\right)\vec{A} - \left(\mathrm{div}\,\vec{A}\right)\vec{B} + \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} - \left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}}$