

Formules d'analyse vectorielle.

Dans tout ce document, on désignera par $U(\vec{r}, t)$ et $V(\vec{r}, t)$ des champs scalaires et par $\vec{A}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$ et $\vec{C}(\vec{r}, t)$ des champs vectoriels.

1 Formules à connaître absolument par coeur.

$\forall U(\vec{r}, t)$ champ scalaire, $\boxed{\text{rot}(\text{grad} U) = \vec{0}}$

Et inversement, si on a un champ $\vec{B}(\vec{r}, t)$ tel que $\text{rot} \vec{B} = \vec{0}$, alors \exists un champ $U(\vec{r}, t)$ tel que $\vec{B} = \text{grad} U$.
Ce champ $U(\vec{r}, t)$ n'est pas unique ($U(\vec{r}, t) + \text{cte}$ convenant $\forall \text{cte}$).

$\forall \vec{A}(\vec{r}, t)$ champ vectoriel, $\boxed{\text{div}(\text{rot} \vec{A}) = 0}$

Et inversement, si on a un champ $\vec{B}(\vec{r}, t)$ tel que $\text{div} \vec{B} = 0$, alors \exists un champ $\vec{A}(\vec{r}, t)$ tel que $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$.
Ce champ n'est pas unique ($\vec{A} + \text{grad} U$ convenant $\forall U(\vec{r}, t)$).

$$\boxed{\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}} \text{ (formule du double produit vectoriel)}$$

$$\boxed{\text{rot} \text{rot} \vec{A} = \text{grad} \text{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}}$$

\forall le volume V limité par la surface fermée S , $\boxed{\iiint_V \text{div} \vec{A} d\tau = \oiint_S \vec{A} \cdot \vec{dS}}$ (formule de Green-Ostrogradski).

\forall la surface S délimitée par la courbe fermée C , $\boxed{\iint_S \text{rot} \vec{A} \cdot \vec{dS} = \oint_C \vec{A} \cdot \vec{dl}}$ (formule de Stokes).

2 Formules à connaître, ou à retrouver TRÈS rapidement.

Ces formules se redémontrent très facilement en utilisant la règle de dérivation d'un produit $((fg)' = f'g + fg')$: vérifiez que vous savez les démontrer.

$$\boxed{\text{grad}(UV) = U \text{grad} V + V \text{grad} U}$$

$$\boxed{\text{div}(U\vec{A}) = U \text{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \text{grad} U}$$

3 Autres formules, qui vous seraient fournies en cas de besoin.

Les deux premières se démontrent également en utilisant la règle de dérivation d'un produit.

$$\boxed{\text{rot}(U\vec{A}) = U \text{rot} \vec{A} + (\text{grad} U) \wedge \vec{A}}$$

$$\boxed{\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{B}}$$

$$\boxed{\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \wedge \text{rot} \vec{B} + \vec{B} \wedge \text{rot} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}}$$

$$\boxed{\text{rot}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = (\text{div} \vec{B}) \vec{A} - (\text{div} \vec{A}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}}$$